Άσκηση 2A : $A \triangle B = A \cup B$ αν και μόνο αν $A \cap B = \emptyset$.

Άσκηση (i) : Αν $A \subseteq X$ τότε $X \setminus A = X$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$.

- Αν $A = \emptyset$ τότε $X \setminus A = X \setminus \emptyset = X$
- Αν $X \setminus A = X$ τότε.

$$
\begin{aligned}
\neg(x \in A) &\equiv \mathbb{1} \wedge \neg(x \in A) \\
&\equiv \big((x \in X) \vee \neg(x \in X)\big) \wedge \neg(x \in A) \\
&\equiv \underbrace{\big((x \in X) \wedge \neg(x \in A)\big)}_{x \in X \setminus A = X} \vee \big(\neg(x \in X) \wedge \neg(x \in A)\big) \\
&\equiv (x \in X) \vee \big(\neg(x \in X) \wedge \neg(x \in A)\big) \\
&\equiv (x \in X) \vee \neg\big((x \in X) \vee (x \in A)\big) \\
&\equiv (x \in X) \vee \neg(x \in X \cup A) \\
&\overset{(*)}{\equiv} (x \in X) \vee \neg(x \in X) \equiv \mathbb{1}
\end{aligned}
$$

(*) CW 5	$A \subseteq X \rightsquigarrow X \cup A = X$

Άρα $\neg(x \in A) \equiv \mathbb{1}$, άρα $x \in A \equiv \mathbb{0}$, άρα $A = \emptyset$.

'Ασκηση (ii): $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$

Απόδειξη:
$$
\begin{aligned}
x \in X \setminus (X \cap Y) &\equiv (x \in X) \wedge \neg (x \in X \cap Y) \\
&\equiv (x \in X) \wedge (\neg (x \in X) \vee \neg (x \in Y)) \\
&\equiv ((x \in X) \wedge \neg (x \in X)) \vee ((x \in X) \wedge \neg (x \in Y)) \\
&\equiv 0 \vee ((x \in X) \wedge \neg (x \in Y)) \\
&\equiv (x \in X) \wedge \neg (x \in Y) \\
&\equiv x \in X \setminus Y
\end{aligned}
$$

'Ασκηση (iii): $X \setminus Y = X$ αν και μόνο αν $X \cap Y = \emptyset$.

Απόδειξη: $X \setminus Y = X \overset{(ii)}{\iff} X \setminus (X \cap Y) = X \underset{X \cap Y \subseteq X}{\overset{(i)}{\iff}} X \cap Y = \emptyset$.

Made with Goodnotes

Απόδειξη 2Α

$$A \triangle B = A \cup B \overset{\text{(ω s}}{\Longleftrightarrow} (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \cup B$$

$$\overset{(iii)}{\Longleftrightarrow} \quad A \cap B = \emptyset$$

$A \cap B \subseteq A \cup B$

Alternative solution

Αν $A \triangle B = A \cup B$ τότε $A \cap B = \emptyset$

$$(x \in A \triangle B) \equiv (x \in A \cup B) \rightsquigarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \equiv \theta$$

$$x \in (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \equiv x \in A \cup B \wedge \neg (x \in A \triangle B)$$

$$\equiv ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \neg\Big((x \in A \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in B) \wedge \neg(x \in A)) \Big)$$

De Morgan $\otimes$

$$\equiv ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \Big(\neg((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \wedge \neg((x \in B) \wedge \neg(x \in A)) \Big)$$

De Morgan $\otimes$

$$\equiv ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge \Big((\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (\neg(x \in B) \vee (x \in A)) \Big)$$

$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$ $\otimes$

$$\otimes \equiv \Big(((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge (\neg(x \in A) \vee (x \in B)) \Big) \wedge (\neg(x \in B) \vee (x \in A))$$

$(P \vee Q) \wedge (R \vee Q) \equiv (P \wedge R) \vee Q$ $\otimes$

$$\otimes \equiv \Big(((x \in A) \wedge \neg(x \in A)) \vee (x \in B) \Big) \wedge (\neg(x \in B) \vee (x \in A))$$

$$\equiv (\theta \vee (x \in B)) \wedge (\neg(x \in B) \vee (x \in A))$$

$$\equiv (x \in B) \wedge (\neg(x \in B) \vee (x \in A))$$

$$\equiv ((x \in B) \wedge \neg(x \in B)) \vee ((x \in B) \wedge (x \in A))$$

$$\equiv \theta \vee ((x \in B) \wedge (x \in A)) \equiv (x \in B) \wedge (x \in A) \equiv x \in A \cap B$$

Άρα $x \in A \cap B$
$$\equiv x \in (A \cup B) \setminus (A \triangle B) \equiv \theta$$
και $A \cap B = \emptyset$