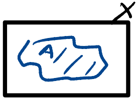
Ορισμός Συμπλήρωμα Συνόλου

Έστω $A \subseteq X$ σύνολα.



Το συμπλήρωμα του A επί του συνόλου X είναι το σύνολο $X \setminus A$.

Άσκηση 4: Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq X$, τότε

α) $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

β) $A \cup (X \setminus A) = X$

γ) $X \setminus (X \setminus A) = A$

δ) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

ε) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

α) $x \in A \cap (X \setminus A) \equiv (x \in A) \wedge (x \in (X \setminus A))$

$\equiv (x \in A) \wedge ((x \in X) \wedge (x \notin A))$

$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $\quad \overset{*}{\equiv} (x \in A) \wedge ((x \notin A) \wedge (x \in X))$

$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ $\quad \overset{*}{\equiv} ((x \in A) \wedge (x \notin A)) \wedge (x \in X)$

$\equiv ((x \in A) \wedge \neg (x \in A)) \wedge (x \in X)$

$P \wedge \neg P \equiv 0$ $\quad \overset{*}{\equiv} 0 \wedge (x \in X)$

$0 \wedge P \equiv 0$ $\quad \overset{*}{\equiv} 0$

$\equiv x \in \emptyset$

β) $A \cup (X \setminus A) = X$

$$x \in A \cup (X \setminus A) \equiv (x \in A) \vee (x \in X \setminus A)$$

$$\equiv (x \in A) \vee \big((x \in X) \wedge (x \notin A)\big)$$

$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$$\overset{*}{\equiv} \big((x \in A) \vee (x \in X)\big) \wedge \big((x \in A) \vee (x \notin A)\big)$$

$$\equiv \big((x \in A) \vee (x \in X)\big) \wedge \big((x \in A) \vee \neg(x \in A)\big)$$

$P \vee (\neg P) \equiv \mathbb{1}$

$$\overset{*}{\equiv} \big((x \in A) \vee (x \in X)\big) \wedge \mathbb{1}$$

$P \wedge \mathbb{1} \equiv P$

$$\overset{*}{\equiv} (x \in A) \vee (x \in X)$$

$$\equiv x \in A \cup X$$

Άρα $A \cup (X \setminus A) = A \cup X \overset{(*)}{=} X$

, $\boxed{{}^{*}\ A \subseteq X \overset{(2\sigma)}{\Longrightarrow} A \cup X = X}$

γ) $X \setminus (X \setminus A) = A$

$$x \in X \setminus (X \setminus A) \equiv (x \in X) \wedge (x \notin (X \setminus A))$$

$$\equiv (x \in X) \wedge \big(\neg(x \in (X \setminus A))\big)$$

$$\equiv (x \in X) \wedge \Big(\neg\big((x \in X) \wedge \neg(x \in A)\big)\Big)$$

$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$

$$\overset{(*)}{\equiv} (x \in X) \wedge \big(\neg(x \in X) \vee \neg(\neg(x \in A))\big)$$

$\neg(\neg P) \equiv P$

$$\overset{(*)}{\equiv} (x \in X) \wedge \big(\neg(x \in X) \vee (x \in A)\big)$$

$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$$\overset{(*)}{\equiv} \big((x \in X) \wedge \neg(x \in X)\big) \vee \big((x \in X) \wedge (x \in A)\big)$$

$P \wedge (\neg P) \equiv \emptyset$

$$\overset{(*)}{\equiv} \emptyset \vee \big((x \in X) \wedge (x \in A)\big)$$

$\emptyset \vee P \equiv P$

$$\overset{(*)}{\equiv} (x \in X) \wedge (x \in A)$$

$$\equiv x \in X \cap A$$

(2ε) $A \subseteq X \leadsto A \cap X = A$

$$\overset{(*)}{\equiv} x \in A$$

$\delta)$ $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

$$x \in X \setminus (A \cup B) \equiv (x \in X) \wedge (x \notin A \cup B)$$

$$\equiv (x \in X) \wedge \neg (x \in A \cup B)$$

$$\equiv (x \in X) \wedge \neg\big((x \in A) \vee (x \in B)\big)$$

$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$

$$\circledast \equiv (x \in X) \wedge \big(\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\big)$$

$P \equiv P \wedge P$

$$\circledast \equiv \big((x \in X) \wedge (x \in X)\big) \wedge \big(\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\big)$$

$(P \wedge P) \wedge (Q \wedge R)$
$\equiv$
$P \wedge (P \wedge (Q \wedge R))$
$\equiv$
$P \wedge ((P \wedge Q) \wedge R)$
$\equiv$
$((P \wedge Q) \wedge R) \wedge P$
$\equiv$
$(P \wedge Q) \wedge (R \wedge P)$
$\equiv$
$(P \wedge Q) \wedge (P \wedge R)$

$$\dots$$

$$\circledast \equiv \big((x \in X) \wedge \neg(x \in A)\big) \wedge \big((x \in X) \wedge \neg(x \in B)\big)$$

$$\equiv \big(x \in (X \setminus A)\big) \wedge \big(x \in (X \setminus B)\big)$$

$$\equiv x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

β) $A = B$ αν και μόνο αν $X \setminus B = X \setminus A$

Αν $A = B$ τότε $X \setminus A = X \setminus B$ (1)

Αν $X \setminus A = X \setminus B$, τότε $A = B$ (2)

Απόδειξη:

$$X \setminus A = X \setminus B \overset{(1)}{\rightsquigarrow} X \setminus (X \setminus A) = X \setminus (X \setminus B)$$

$$\underset{A}{\overset{(4\gamma)\,\|}{X \setminus (X \setminus A)}} \qquad \underset{B}{\overset{\|\,(4\gamma)}{X \setminus (X \setminus B)}}$$

γ) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

$$x \in A \cap (X \setminus B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in X \setminus B)$$

$$\equiv (x \in A) \wedge [(x \in X) \wedge \neg(x \in B)]$$

$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

$$\overset{*}{\equiv} [(x \in A) \wedge (x \in X)] \wedge \neg(x \in B)$$

$$\equiv (x \in A \cap X) \wedge \neg(x \in B)$$

Εχ 2ε

$A \subseteq X \rightsquigarrow A \cap X = A$

$$\overset{**}{\equiv} (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

$$\equiv x \in A \setminus B$$