Άσκηση 2:

α) $X \subseteq X \cup Y$ και $Y \subseteq X \cup Y$

β) $X \cap Y \subseteq X$ και $X \cap Y \subseteq Y$

γ) $X \cup \emptyset = X$ και $X \cap \emptyset = \emptyset$

δ) $X \cup Y = Y$ αν και μόνο αν $X \subseteq Y$

ε) $X \cap Y = Y$ αν και μόνο αν $Y \subseteq X$

γ) $\boxed{X \cap \emptyset = \emptyset}$

$$x \in X \cap \emptyset \equiv (x \in X) \wedge (x \in \emptyset)$$
$$\equiv (x \in X) \wedge 0$$
$$\equiv 0$$
$$\equiv (x \in \emptyset)$$

$\boxed{X \cup \emptyset = X}$

$$x \in X \cup \emptyset \equiv (x \in X) \vee (x \in \emptyset)$$

$P \vee 0 \equiv P$

$$\overset{\circledast}{\equiv} (x \in X) \vee 0$$
$$\equiv (x \in X)$$

α) $X \subseteq X \cup Y$

$$(x \in X) \Rightarrow (x \in X \cup Y) \equiv (x \in X) \Rightarrow ((x \in X) \vee (x \in Y))$$

$P \to Q \equiv (\neg P) \vee Q$

$$\overset{\circledast}{\equiv} \neg(x \in X) \vee ((x \in X) \vee (x \in Y))$$
$$\equiv (\neg(x \in X) \vee (x \in X)) \vee (x \in Y)$$

$(\neg P) \vee P \equiv \mathbb{1}$

$$\overset{\circledast}{\equiv} \mathbb{1} \vee (x \in Y)$$

$\mathbb{1} \vee P \equiv \mathbb{1}$

$$\overset{\circledast}{\equiv} \mathbb{1}$$

β) $X \cap Y \subseteq X$

$$x \in (X \cap Y) \Rightarrow (x \in X) \equiv ((x \in X) \wedge (x \in Y)) \Rightarrow (x \in X)$$
$$\equiv \neg((x \in X) \wedge (x \in Y)) \vee (x \in X)$$
$$\equiv (\neg(x \in X) \vee \neg(x \in Y)) \vee (x \in X)$$

$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

$$\overset{\circledast}{\equiv} (x \in X) \vee (\neg(x \in X) \vee \neg(x \in Y))$$
$$\equiv ((x \in X) \vee (\neg(x \in X))) \vee \neg(x \in Y)$$

$P \vee (\neg P) \equiv \mathbb{1}$

$$\overset{\circledast}{\equiv} \mathbb{1} \vee \neg(x \in Y)$$
$$\equiv \mathbb{1}$$

δ) $X \cup Y = Y$ αν και μόνο αν $X \subseteq Y$

Αν $X \cup Y = Y$, τότε $X \subseteq Y$

$P(x): (x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$

υπόθεση (*) $\equiv (x \in X) \Rightarrow (x \in X \cup Y)$

$\equiv (x \in X) \Rightarrow ((x \in X) \vee (x \in Y))$

$P \Rightarrow Q \equiv (\neg P) \vee Q$ (*) $\equiv \neg(x \in X) \vee ((x \in X) \vee (x \in Y))$

$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ (*) $\equiv (\neg(x \in X) \vee (x \in X)) \vee (x \in Y)$

$\equiv \mathbb{1} \vee (x \in Y)$

$\equiv \mathbb{1}$

Αν $X \subseteq Y$, τότε $X \cup Y = Y$

$x \in X \cup Y \equiv (x \in X) \vee (x \in Y)$

(*) $\equiv (x \in Y)$

(*) γιατί $((x \in X) \vee (x \in Y)) \Leftrightarrow (x \in Y)$ είναι ταυτολογία.

	$x \in X$	$x \in Y$	$(x \in X) \vee (x \in Y)$	$((x \in X) \vee (x \in Y)) \Leftrightarrow (x \in Y)$
	1	1	1	1
	0	1	1	1
$X \subseteq Y$	~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
	0	0	0	1

Άσκηση 3

α) $X \setminus X = \emptyset$

β) $X \setminus \emptyset = X$

γ) $\emptyset \setminus X = \emptyset$

δ) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$

ε) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$

ζ) $X \triangle X = \emptyset$

η) $X \triangle Y = Y \triangle X$

θ) $X \triangle \emptyset = X$

η) $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$

α)
$$
\begin{aligned}
x \in X \setminus X &\equiv (x \in X) \wedge (x \notin X) \\
&\equiv (x \in X) \wedge \neg(x \in X) \\
&\equiv \mathbb{0} \\
&\equiv (x \in \emptyset)
\end{aligned}
$$

β)
$$
\begin{aligned}
x \in X \setminus \emptyset &\equiv (x \in X) \wedge (x \notin \emptyset) \\
&\equiv (x \in X) \wedge \mathbb{1} \\
&\overset{(*)}{\equiv} (x \in X)
\end{aligned}
$$

$P \wedge \mathbb{1} \equiv P$

γ)
$$
\begin{aligned}
x \in \emptyset \setminus X &\equiv (x \in \emptyset) \wedge (x \notin X) \\
&\equiv \mathbb{0} \wedge (x \notin X) \\
&\equiv \mathbb{0} \\
&\equiv (x \in \emptyset)
\end{aligned}
$$

δ) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$

$$x \in (X \setminus Y) \setminus Z \equiv (x \in (X \setminus Y)) \wedge (x \notin Z)$$
$$\equiv ((x \in X) \wedge (x \notin Y)) \wedge (x \notin Z)$$
$$\equiv (x \in X) \wedge ((x \notin Y) \wedge (x \notin Z))$$
$$\equiv (x \in X) \wedge (\neg(x \in Y) \wedge \neg(x \in Z))$$

$(\neg Q) \wedge (\neg R)$
$\equiv$
$\neg(Q \vee R)$

$$\overset{*}{\equiv} (x \in X) \wedge \neg((x \in Y) \vee (x \in Z))$$
$$\equiv (x \in X) \wedge \neg(x \in Y \cup Z)$$
$$\equiv (x \in X) \wedge (x \notin Y \cup Z)$$
$$\equiv x \in X \setminus (Y \cup Z)$$

ε) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$

$$(X \setminus Y) \setminus Z \overset{(3\delta)}{=} X \setminus (Y \cup Z)$$
$$\overset{(1\gamma)}{=} X \setminus (Z \cup Y)$$
$$\overset{(3\delta)}{=} (X \setminus Z) \setminus Y$$

ζ) $X \triangle X = \emptyset$

$$X \triangle X = (X \setminus X) \cup (X \setminus X)$$
$$\overset{(3\alpha)}{=} \emptyset \cup \emptyset$$
$$= \emptyset$$

η) $X \triangle Y = Y \triangle X$

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \overset{(1\gamma)}{=} (Y \setminus X) \cup (X \setminus Y) = Y \triangle X$$

1) $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$

$$x \in X \triangle Y \equiv x \in (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

$$\equiv \big(x \in (X \setminus Y)\big) \vee \big(x \in (Y \setminus X)\big)$$

$$\equiv \big((x \in X) \wedge (x \notin Y)\big) \vee \big((x \in Y) \wedge (x \notin X)\big)$$

$\boxed{P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$ (*)

$$\overset{(*)}{\equiv} \Big[\big((x \in X) \wedge (x \notin Y)\big) \vee (x \in Y)\Big] \wedge \Big[\big((x \in X) \wedge (x \notin Y)\big) \vee (x \notin X)\Big]$$

$\boxed{(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)}$ (*)

$$\overset{(*)}{\equiv} \Big[\big((x \in X) \vee (x \in Y)\big) \wedge \big((x \notin Y) \vee (x \in Y)\big)\Big] \wedge \Big[\big((x \in X) \vee (x \notin X)\big) \wedge \big((x \notin Y) \vee (x \notin X)\big)\Big]$$

$\boxed{P \vee (\neg P) \equiv \mathbb{1}}$ (*)

$$\overset{(*)}{\equiv} \Big[\big((x \in X) \vee (x \in Y)\big) \wedge \mathbb{1}\Big] \wedge \Big[\mathbb{1} \wedge \big((x \notin Y) \vee (x \notin X)\big)\Big]$$

$\boxed{P \wedge \mathbb{1} \equiv \mathbb{1}}$ (*)

$$\overset{(*)}{\equiv} \big((x \in X) \vee (x \in Y)\big) \wedge \big((x \notin Y) \vee (x \notin X)\big)$$

$(\neg P) \vee (\neg Q) \equiv \neg(P \wedge Q)$ = De Morgan

$$\equiv \big((x \in X) \vee (x \in Y)\big) \wedge \Big(\neg\big((x \in X) \wedge (x \in Y)\big)\Big) \equiv x \in (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$$