Άσκηση 0 : Να βρείτε

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$, $X \triangle Y$

όταν α) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$

β) $X = A$ (άρτιοι), $Y = \Pi$ (περιττοί)

γ) $X = \mathbb{N}$, $Y = A$

δ) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \Pi$

α) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$

$\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

$\mathbb{N} \triangle \mathbb{Z} = \emptyset \cup \{-1, -2, -3, \dots\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$

β) $A \cup \Pi = \mathbb{Z}$

$A \cap \Pi = \emptyset$

$A \setminus \Pi = A$

$\Pi \setminus A = \Pi$

$A \triangle \Pi = A \cup \Pi = \mathbb{Z}$

γ) $\mathbb{N} \cup A = \{\dots, -4, -2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N} \cap A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

$\mathbb{N} \setminus A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

$A \setminus \mathbb{N} = \{-2, -4, -6, \dots\}$

$\mathbb{N} \triangle A = \{\dots, -6, -4, -2, 1, 3, 5, \dots\}$

δ) $\Pi \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$\Pi \cap \mathbb{Z} = \Pi$

$\Pi \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$

$\mathbb{Z} \setminus \Pi = A = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

$\Pi \triangle \mathbb{Z} = \emptyset \cup A = A$

Ορισμός: Ισότητα συνόλων.

Δύο σύνολα X, Y είναι ίσα

γράφω $\boxed{X = Y}$

αν $X \subseteq Y$ και $Y \subseteq X$.

Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι

α) $X \cup X = X$

β) $X \cap X = X$

γ) $X \cup Y = Y \cup X$

δ) $X \cap Y = Y \cap X$

ε) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

ζ) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

η) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

θ) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

α) $x \in X \cup X \equiv (x \in X) \vee (x \in X) \overset{*}{\equiv} x \in X$

γιατί $P \vee P \overset{*}{\equiv} P$

β) $x \in X \cap X \equiv (x \in X) \wedge (x \in X) \overset{*}{\equiv} x \in X$

γιατί $P \wedge P \equiv P$

γ) $x \in X \cup Y \equiv (x \in X) \vee (x \in Y) \overset{*}{\equiv} (x \in Y) \vee (x \in X) \equiv x \in Y \cup X$

γιατί $P \vee Q \equiv Q \vee P$

δ) $x \in X \cap Y \equiv (x \in X) \wedge (x \in Y) \overset{*}{\equiv} (x \in Y) \wedge (x \in X) \equiv x \in Y \cap X$

γιατί $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

ε) $x \in X \cup (Y \cup Z) \equiv (x \in X) \vee (x \in Y \cup Z)$

$\equiv (x \in X) \vee ((x \in Y) \vee (x \in Z))$

γιατί $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$

$\overset{*}{\equiv} ((x \in X) \vee (x \in Y)) \vee (x \in Z)$

$\equiv (x \in X \cup Y) \vee (x \in Z) \equiv x \in (X \cup Y) \cup Z$

ζ) $x \in X \ (Y \ \ Z) \equiv (x \in X) \wedge (x \in Y \cap Z)$

$\equiv (x \in X) \wedge ((x \in Y) \wedge (x \in Z))$

γιατί $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$

$\overset{*}{\equiv} ((x \in X) \wedge (x \in Y)) \wedge (x \in Z)$

$\equiv (x \in X \cap Y) \wedge (x \in Z) \equiv x \in (X \cap Y) \cap Z$

η) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

$$x \in X \cap (Y \cup Z) \equiv (x \in X) \wedge (x \in Y \cup Z)$$
$$\equiv (x \in X) \wedge ((x \in Y) \vee (x \in Z))$$
$$\overset{*}{\equiv} ((x \in X) \wedge (x \in Y)) \vee ((x \in X) \wedge (x \in Z))$$
$$\equiv (x \in X \cap Y) \vee (x \in X \cap Z)$$
$$\equiv x \in (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

* $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

θ) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

$$x \in X \cup (Y \cap Z) \equiv (x \in X) \vee (x \in Y \cap Z)$$
$$\equiv (x \in X) \vee ((x \in Y) \wedge (x \in Z))$$
$$\overset{*}{\equiv} ((x \in X) \vee (x \in Y)) \wedge ((x \in X) \vee (x \in Z))$$
$$\equiv (x \in X \cup Y) \wedge (x \in X \cup Z)$$
$$\equiv x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

* $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$