

Homework 3 - Υποσύνολα

Ορισμός: Έστω X, Y σύνολα.

Το X είναι υποσύνολο του Y
γράφω $X \subseteq Y$

αν για κάθε $x \in X$, ο λογικός τύπος
 $P(x): (x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$ είναι **αληθής**.

Ορισμός: Κενό (υπο)σύνολο

Το κενό σύνολο, \emptyset , ορίζεται ως
το σύνολο χωρίς στοιχεία,
δηλαδή αν ο λογικός τύπος

$x \in \emptyset$ είναι πάντα **αληθής**

Ορισμός: Έστω X, Y σύνολα.

Λέμε ότι X δεν είναι υποσύνολο του Y
γράφω $X \not\subseteq Y$

αν υπάρχει $x \in X$, ώστε ο λογικός τύπος

$P(x): (x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$ είναι **ψευδής**.

Ορισμός: Έστω X, Y σύνολα

X είναι γνήσιο υποσύνολο του Y

γράφω $X \subsetneq Y$

αν υπάρχει $y \in Y$ ώστε ο λογικός τύπος

$P(y): (y \in Y) \Rightarrow (y \in X)$ είναι **ψευδής**.

Άσκηση 1: Να αποδείξετε τα παρακάτω.

α) Αν X σύνολο τότε $\emptyset \subseteq X$.

β) Αν X σύνολο τότε $X \subseteq X$.

γ) Έστω X, Y, Z σύνολα

Αν $X \subseteq Y$ και $Y \subseteq Z$, τότε $X \subseteq Z$

Άσκηση 2 : Να αποδείξετε ότι

$$X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$X_2 = \{-3, 8, -7, 4\}$$

$$X_3 = \{-3, 3, 4\}$$

$$X_4 = \{-3, 4\}$$

$$X_5 = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}$$

$$X_6 = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x - 12 = 0\}$$

$$X_7 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| > 2\}$$

$$X_8 = \{x \in \mathbb{Z} : x < 100\}$$

$$a) X_4 \subseteq X_3$$

$$b) X_4 \subsetneq X_3$$

$$c) X_4 \not\subseteq X_2$$

$$d) X_2 \not\subseteq X_1$$

$$e) X_4 \subseteq X_6 \text{ και } X_6 \subseteq X_4$$

$$f) X_3 \subsetneq X_7$$

$$g) X_7 \not\subseteq X_8 \text{ και } X_8 \not\subseteq X_7$$

$$h) X_3 \not\subseteq X_1$$

$$i) X_4 \subseteq X_7 \text{ και } X_6 \subseteq X_8$$

Άσκηση 3 : Να αποδείξετε τα παρακάτω

$$X_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 3\}$$

$$X_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x < 3\}$$

$$X_3 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 3\}$$

$$X_4 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 3\}$$

$$X_5 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| > 3\}$$

$$X_6 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \geq 3\}$$

$$X_7 = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < \frac{7}{2}\}$$

$$X_8 = \{x \in \mathbb{Z} : x < \frac{9}{2}\}$$

a) $X_3 \subseteq X_2 \not\subseteq X_1$

b) $X_3 \subseteq X_4 \subseteq X_1$

γ) $X_5 \not\subseteq X_6$

δ) $X_7 \subseteq X_3$ και $X_3 \subseteq X_7$

ε) $X_1 \not\subseteq X_8$

Άσκηση 4 : $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ είναι άρτιος αριθμός}\}$

$\mathbb{Z} = \{\text{ακέραιοι αριθμοί}\}$

$\mathbb{N} = \{\text{φυσικοί αριθμοί}\}$

Να αποδείξετε ότι α) $A \subseteq \mathbb{Z}$ και $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

β) $A \subsetneq \mathbb{Z}$ και $\mathbb{Z} \not\subseteq A$

γ) $\mathbb{N} \not\subseteq A$ και $A \not\subseteq \mathbb{N}$

Άσκηση 5 : Να βρείτε όλα

τα υποσύνολα του συνόλου

a) $X_a = \{5\}$

b) $X_b = \{3, 10\}$

γ) $X_\gamma = \{-2, 0, 7\}$

δ) $X_\delta = \{-1, 7, 2, 4\}$

