Classwork 5 – Ένωση – Τομή – Διαφορά – Συμμετρική Διαφορά

Ορισμός: Ένωση – Τομή Συνόλων

Έστω X, Y σύνολα.

Η <u>ένωση</u> των X και Y ορίζεται ως εξής:

$$X \cup Y := \{ z : P(z) \text{ αληθής} \}$$

$$P(z) : (z \in X) \vee (z \in Y)$$

Η <u>τομή</u> των X και Y ορίζεται ως εξής:

$$X \cap Y := \{ z : Q(z) \text{ αληθής} \}$$

$$Q(z) : (z \in X) \wedge (z \in Y)$$

Ορισμός: Διαφορά – Συμμετρική Διαφορά

Έστω X, Y σύνολα.

Η <u>διαφορά</u> των X και Y ορίζεται ως εξής:

$$X \setminus Y := \{ z : R(z) \text{ αληθής} \}$$

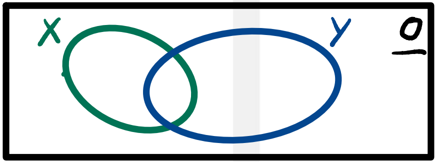
$$R(z) : (z \in X) \wedge (z \notin Y)$$

η <u>συμμετρική διαφορά</u> των X, Y ως

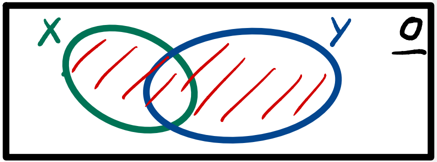
$$X \triangle Y := (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

Διάγραμμα Venn

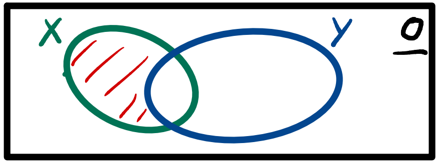
Έστω Ω σύνολο και $X \subseteq \Omega$, $Y \subseteq \Omega$



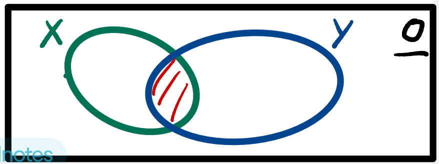
$X \cup Y$



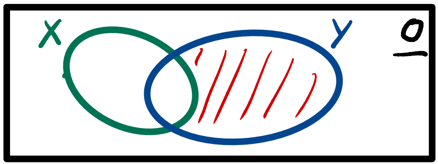
$X \setminus Y$



$X \cap Y$



$Y \setminus X$



Παράδειγμα 1

$X = \{1, 5, -2, 6\}$

$Y = \{-5, 1, 7\}$

$X \cup Y = \{-5, -2, 1, 5, 6, 7\}$

$X \cap Y = \{1\}$

$X \setminus Y = \{5, -2, 6\}$

$Y \setminus X = \{-5, 7\}$

$X \Delta Y = \{5, -2, 6, -5, 7\}$

Παράδειγμα 2

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$Y = \{2, 4, 6, 8\}$

$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$X \cap Y = \{2, 4, 6, 8\}$

$X \setminus Y = \{1, 3, 5, 7\}$

$Y \setminus X = \emptyset$

$X \Delta Y = \{1, 3, 5, 7\}$

Άσκηση 0: Να βρείτε

$X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$, $X \Delta Y$

όταν α) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{Z}$

β) $X = A$ (άρτιοι), $Y = \Pi$ (περιττοί)

γ) $X = \mathbb{N}$, $Y = A$.

δ) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \Pi$

Made with Goodnotes

Ορισμός: Ισότητα συνόλων.

Δύο σύνολα X, Y είναι **ίσα**

γράφω $\boxed{X = Y}$

αν $X \subseteq Y$ και $Y \subseteq X$.

Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι

α) $X \cup X = X$

β) $X \cap X = X$

γ) $X \cup Y = Y \cup X$

δ) $X \cap Y = Y \cap X$

ε) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$

ζ) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

η) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (Y \cap Z)$

θ) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (Y \cup Z)$

Άσκηση 2:

α) $X \subseteq X \cup Y$ και $Y \subseteq X \cup Y$

β) $X \cap Y \subseteq X$ και $X \cap Y \subseteq Y$

γ) $X \cup \emptyset = X$ και $X \cap \emptyset = \emptyset$

δ) $X \cup Y = Y$ αν και μόνο αν $X \subseteq Y$.

ε) $X \cap Y = Y$ αν και μόνο αν $Y \subseteq X$

Άσκηση 3

α) $X \setminus X = \emptyset$

β) $X \setminus \emptyset = X$

γ) $\emptyset \setminus X = \emptyset$

δ) $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$

ε) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus Y$

ζ) $X \triangle X = \emptyset$

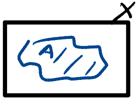
η) $X \triangle Y = Y \triangle X$

θ) $X \triangle \emptyset = X$

η) $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$

<u>Ορισμός</u> Συμπλήρωμα Συνόλου

Έστω $A \subseteq X$ σύνολα.



Το συμπλήρωμα του A επί του συνόλου X είναι το σύνολο $X \setminus A$.

<u>Άσκηση 4</u>: Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq X$, τότε

α) $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

β) $A \cup (X \setminus A) = X$

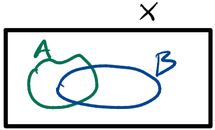
γ) $X \setminus (X \setminus A) = A$

δ) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

ε) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

Άσκηση 5

Έστω $A, B \subseteq X$.



Να αποδείξετε ότι

α) $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $X \setminus B \subseteq X \setminus A$.

β) $A = B$ αν και μόνο αν $X \setminus B = X \setminus A$

γ) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$

δ) $A \triangle B = (A \cap (X \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \cap B)$