Classwork 4 Θεωρία Συνόλων

Σύνολα Αριθμών

1) $X = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

2) $Y = \{-2, 20, \frac{3}{5}, \sqrt{7}\}$

3) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

σύνολο φυσικών αριθμών

4) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

σύνολο ακεραίων αριθμών

Ορισμός: Έστω X ένα σύνολο αριθμών και x ένας αριθμός. Θα λέμε

$x \in X$, αν x είναι αριθμός του συνόλου X

$x \notin X$, αν x δεν είναι αριθμός του συνόλου X

$x \in X \rightsquigarrow x$ ανήκει στο X

$x \notin X \rightsquigarrow x$ δεν ανήκει στο X

Made with Goodnotes

Παράδειγμα 1

$$X = \{0, 1, -3, 205\}$$

$x = -3$, τότε $x \in X$

$x = 3$, τότε $x \notin X$

$x = 205$, τότε $x \in X$

$x = -8$, τότε $x \notin X$

Παράδειγμα 2

$X = \mathbb{Z}$ σύνολο ακεραίων

$x = 0$, $x \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{3}{2}$, $x \notin \mathbb{Z}$

$x = \sqrt{10}$, $x \notin \mathbb{Z}$

Παράδειγμα 3

$$X = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 1 = 0\}$$

$x = 1 : x \in X$, γιατί $1 \in \mathbb{Z}$ και $1^2 - 1 = 0$

$x = -1 : x \in X$, γιατί $-1 \in \mathbb{Z}$ και $(-1)^2 - 1 = 0$

$x = 2 : x \notin X$, γιατί $2^2 - 1 \neq 0$

$x = \frac{5}{3} : x \notin X$, γιατί $\frac{5}{3} \notin \mathbb{Z}$

Made with Goodnotes

Παράδειγμα 4

$$X = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3 = 0\}$$

$x = 0$, $x \notin X$ γιατί $0^2 - 3 \neq 0$

$x = -5$, $x \notin X$ γιατί $(-5)^2 - 3 \neq 0$

$x = \sqrt{3}$, $x \notin X$ γιατί $x \notin \mathbb{Z}$

όμως $(\sqrt{3})^2 - 3 = 0$.

$x = -\sqrt{3}$, $x \notin X$ γιατί $x \notin \mathbb{Z}$

όμως $(-\sqrt{3})^2 - 3 = 0$.

Made with Goodnotes

Παράδειγμα 5

Έστω $x \in \mathbb{Z}$.

x λέγεται άρτιος, αν υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$

ώστε $x = 2 \cdot m$

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ είναι άρτιος αριθμός}\}$$

$x = 8$: $x \in A$, γιατί $8 = 2 \cdot 4$, $4 \in \mathbb{Z}$

$x = 2$: $x \in A$, γιατί $2 = 2 \cdot 1$, $1 \in \mathbb{Z}$

$x = 0$: $x \in A$, γιατί $0 = 2 \cdot 0$, $0 \in \mathbb{Z}$

$x = -6$: $x \in A$, γιατί $-6 = 2 \cdot (-3)$, $-3 \in \mathbb{Z}$

$x = 1$: $x \notin A$, γιατί αν 1 ήταν άρτιος

τότε $1 = 2 \cdot m$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$

άρα $\frac{1}{2} = m \in \mathbb{Z}$ ΑΤΟΠΟ.

$x = \frac{1}{4}$: $x \notin A$, γιατί $x \notin \mathbb{Z}$

Ορισμός: $x \in \mathbb{Z}$. x λέγεται άρτιος, αν υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $x = 2 \cdot m$

x λέγεται περιττός, αν υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $x = 2 \cdot m + 1$

$A = \{ x \in \mathbb{Z} : x$ είναι άρτιος αριθμός $\}$

$\Pi = \{ x \in \mathbb{Z} : x$ είναι περιττός αριθμός $\}$

Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι

i) $1 \in \Pi$

ii) $3 \in \Pi$

iii) $3 \notin A$

iv) $-5 \notin A$

v) Αν $x \in \Pi$, τότε $x \notin A$

vi) Αν $x \in A$, τότε $x \notin \Pi$

Άσκηση 2: Να εξετάσετε αν ο λογικός τύπος $P: (x \in A) \Leftrightarrow (x \notin \Pi)$ είναι ταυτολογία.

Made with Goodnotes

Made with Goodnotes

Ορισμός: Έστω X, Y σύνολα.

Το X είναι υποσύνολο του Y

γράφω $\boxed{X \subseteq Y}$

αν για κάθε $x \in X$, ο λογικός τύπος

$P(x): (x \in X) \Rightarrow (x \in Y)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα 1

$$X = \{3, -7\}$$

$$Y = \{-8, -7, -200, 3, 0, 4, 30\}$$

$$X \subseteq Y$$

Απόδειξη:

- $x = 3$, $P(x): (3 \in X) \Rightarrow (3 \in Y)$ είναι αληθής

  γιατί $1 \Rightarrow 1 \rightsquigarrow 1$

- $x = -7$, $P(x): (-7 \in X) \Rightarrow (-7 \in Y)$ είναι αληθής

  γιατί $1 \Rightarrow 1 \rightsquigarrow 1$

Παράδειγμα 2

$$X = \{3, 0, -9\}$$

$$Y = \{2, 5, 0, 10\}$$

X δεν είναι υποσύνολο του Y, $X \not\subseteq Y$

Απόδειξη:

- $x = 0$, $P(x): (0 \in X) \Rightarrow (0 \in Y)$ είναι αληθής

  γιατί $1 \Rightarrow 1 \rightsquigarrow 1$

- $x = 3$, $P(x): (3 \in X) \Rightarrow (3 \in Y)$ είναι ψευδής

  γιατί $1 \Rightarrow 0 \rightsquigarrow 0$

Άρα X δεν είναι υποσύνολο του Y

Made with Goodnotes