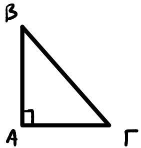
Προτάσεις

Παραδείγματα:

1) Το 3 είναι άρτιος.

2) Το 3 είναι περιττός.

3) Το $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



4) Το $A\hat{B}\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

5) Το $A\hat{B}\Gamma$ είναι σκαληνό ή ισοσκελές.

Λογικοί Σύνδεσμοι

$\neg$	ΟΧΙ
$\wedge$	ΚΑΙ
$\vee$	Η
$\veebar$	ΕΙΤΕ
$\Rightarrow$	Αν ..., τότε....
$\Leftrightarrow$	αν και μόνο αν

Ορισμός (Λογικός Τύπος)

Ένας λογικός τύπος είναι μία έκφραση που περιέχει

- προτάσεις ($p, q, r, t, \ldots$)

και

- λογικούς συνδέσμους ($\wedge, \vee, \neg, \veebar, \Rightarrow, \Leftrightarrow$)

Παραδείγματα:

1) $(p \wedge q) \vee (\neg p)$

2) $p \veebar (\neg p)$

3) $q \wedge q$

4) $(p \Rightarrow (\neg q)) \vee ((\neg p) \Rightarrow q)$

5) $\neg((\neg p) \wedge (\neg q)) \Leftrightarrow (p \vee q)$

6) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s$

7) $(p \wedge (q \vee r)) \vee s$

8) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

9) $((p \veebar q) \Rightarrow q) \wedge s$

10) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\neg p) \vee q)$

ΑΛΗΘΟΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ

ΑΛΗΘΗΣ – 1   ΨΕΥΔΗΣ – 0

p	$\neg p$	
0	1	
1	0	

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Παραδείγματα:

$R_0 : (p \wedge p) \Rightarrow p$

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \Rightarrow p$
1	1	1
0	0	1

$R_2 : (p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee q$

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$(\neg p) \vee q$	R_2
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

$R_1 : (p \vee q) \wedge p$

p	q	$p \vee q$	$R \rightarrow (p \vee q) \wedge p$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

$R_3 : (p \vee q) \wedge r$

p	q	r	$p \vee q$	$R_3 : (p \vee q) \wedge r$
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$$R_4 : \left((\neg p) \vee (\neg q) \right) \Longleftrightarrow \left((\neg p) \wedge q \right)$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \vee (\neg q)$	$(\neg p) \wedge q$	R_4
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0

Ορισμός: (Ταυτολογία - Αντίφαση)

Ένας λογικός τύπος R λέγεται ταυτολογία/αντίφαση αν ο αληθοπίνακας του (R) έχει μόνο 1/0. . . .

R_1: $p \Rightarrow p$ είναι ταυτολογία

p	$p \Rightarrow p$
1	1
0	1

R_2: $p \wedge (\neg p)$ είναι αντίφαση.

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$
1	0	0
0	1	0

R_3: $p \vee (\neg p)$ είναι ταυτολογία

p	$\neg p$	$p \vee (\neg p)$
1	0	1
0	1	1

R_4: $\neg(p \wedge (\neg p))$ είναι ταυτολογία

p	$\neg p$	$p \wedge (\neg p)$	$\neg(p \wedge (\neg p))$
1	0	0	1
0	1	0	1

$R_1 \longrightarrow$ νόμος της ταυτότητας

$R_3 \longrightarrow$ νόμος του αποκλειστικού τρίτου

$R_4 \longrightarrow$ νόμος της αντίφασης

Άσκηση 1: Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω λογικοί τύποι είναι ταυτολογίες.

Νόμος της διπλής άρνησης: R_1: $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Νόμος De Morgan: R_2: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

Νόμος De Morgan: R_3: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

Ορισμός: (Ταυτολογική Ισοδυναμία)

Δύο λογικοί τύποι R_1, R_2 λέγονται ταυτολογικά ισοδύναμοι αν ο λογικός τύπος $R_3 : R_1 \Leftrightarrow R_2$ είναι ταυτολογία.

Γράφω $R_1 \equiv R_2$

Άσκηση 2: Να αποδείξετε τα παρακάτω.

α) $(p \wedge (\neg q)) \vee q \equiv p \vee q$

β) $(p \vee (\neg q)) \wedge q \equiv p \wedge q$

γ) $p \Rightarrow q \equiv (\neg q) \Rightarrow (\neg p)$

δ) $p \Rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$

ε) $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge (\neg q))$

ζ) $p \Leftrightarrow q \equiv ((\neg p) \vee q) \wedge (p \vee (\neg q))$

η) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))$