Διακριτά Μαθηματικά

Μαθηματική Επαγωγή

Εργασία 1η

1. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι:

   (i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

   (ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

   (iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

2. Να αποδείξετε ότι:

   $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

3. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι:

   (i) $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)^a = x_1^a \cdot x_2^a \cdot x_3^a \cdot \ldots \cdot x_n^a \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, όπου $a, x_i \in \mathbb{R},\ a > 1,\ x_i > 0,\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$

   (ii) $|x_1 - x_2 - x_3 - \ldots - x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, όπου $x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$

   (iii) $\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_3} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_n} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$, όπου $x_i \in \mathbb{R},\ x_i \geq 0\ i = 1, 2, 3, \ldots, n$

   (iv) $\tan(n \cdot \pi) = 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

   Δίνεται ότι:

   1. $(x_1 \cdot x_2)^a = x_1^a \cdot x_2^a$
   2. $|x_1 - x_2| \leq |x_1| + |x_2|$
   3. $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2}$
   4. $\tan(\theta + \varphi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta \cdot \tan\varphi} \ \ \forall\, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$ και $\tan 0 = 0,\ \tan\pi = 0$

4. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι:

   $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{3} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

5. Να αποδείξετε με μαθηματική επαγωγή ότι:

   $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (2n+1) + 1}{4} \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$