Πρόταση: Αν $A, B \subseteq X$, τότε $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Απόδειξη: $\underline{(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)}$

Έστω $x \in (A \cap B) \cup C$, τότε $x \in A \cap B$ είτε $x \in C$

τότε $(x \in A$ και $x \in B)$ είτε $x \in C$

$P: x \in A$

$Q: x \in B$

$R: x \in C$

De Morgan

$(P \wedge Q) \vee R \equiv (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$

$\rightarrow$ τότε $(x \in A$ είτε $x \in C)$ και $(x \in B$ είτε $x \in C)$

τότε $x \in A \cup C$ και $x \in B \cup C$

τότε $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$\underline{(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C}$.

Έστω $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, τότε $(x \in A$ είτε $x \in C)$ και $(x \in B$ είτε $x \in C)$

$P: x \in A$

$Q: x \in B$

$R: x \in C$

De Morgan

$(P \vee R) \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee R$

$\rightarrow$ τότε $(x \in A$ και $x \in B)$ είτε $x \in C$

τότε $x \in A \cap B$ είτε $x \in C$

τότε $x \in (A \cap B) \cup C$

Πρόταση : $A, B, C \subseteq X$

Τότε, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Απόδειξη: $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

Έστω $x \in (A \cap B) \cap C$, τότε $x \in A \cap B$ και $x \in C$

τότε ($x \in A$ και $x \in B$) και $x \in C$

$P : x \in A$

$Q : x \in B$ $\quad (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

$R : x \in C$

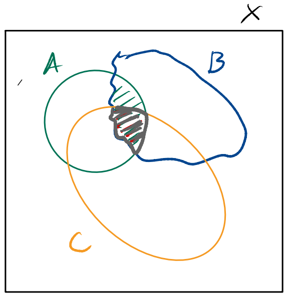
$\downarrow$

τότε $x \in A$ και ($x \in B$ και $x \in C$)

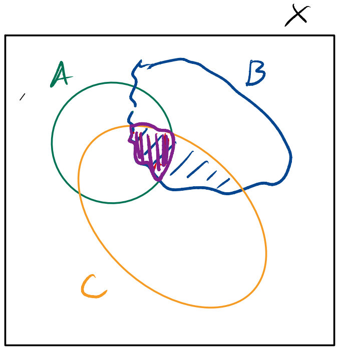
τότε $x \in A \cap (B \cap C)$

$A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

Similarly



$(A \cap B) \cap C$



$A \cap (B \cap C)$

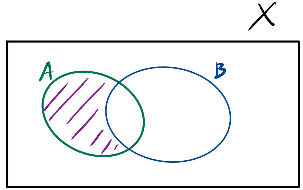
<u>Ορισμός</u>: Έστω $A, B \subseteq X$

Τότε η διαφορά των A, B είναι το σύνολο

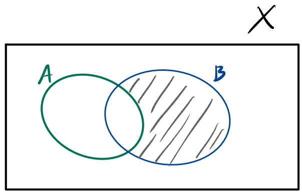
$$A \setminus B := \{x \in X : x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

και η διαφορά των B, A είναι το σύνολο

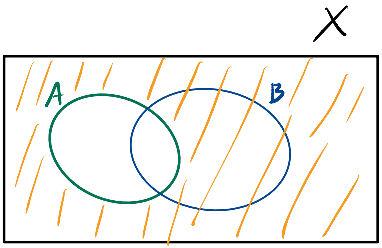
$$B \setminus A := \{x \in X : x \in B \text{ και } x \notin A\}$$



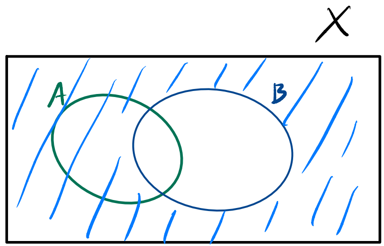
$A \setminus B$



$B \setminus A$



$X \setminus A$



$X \setminus B$

Παράδειγμα 1: $X = \mathbb{R}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} = (-\infty, 2)$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\} = (-3, +\infty)$

$X \setminus A = \{x \in X : x \in X \text{ και } x \notin A\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \text{ και } x \geq 2\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty)$

$X \setminus B = \{x \in X : x \in X \text{ και } x \notin B\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \text{ και } x \leq -3\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\} = (-\infty, -3]$

$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ και } x \notin B\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{ και } x \leq -3\}$

$-3 < 2$ $= \{x \in \mathbb{R} : x \leq -3\} = (-\infty, -3]$

$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : x \in B \text{ και } x \notin A\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : x > -3 \text{ και } x \geq 2\}$

$-3 < 2$ $= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty)$

Παράδειγμα 2:

$X = \mathbb{R} \quad A = \mathbb{Z} \quad B = \mathbb{N}$

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ και } x \notin B\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z} \text{ και } x \notin \mathbb{N}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}.$$

Απόδειξη: $A \setminus B \subseteq \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}$

Έστω $x \in A \setminus B$.

Τότε $x \in \mathbb{Z}$ και $x \notin \mathbb{N}$

Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, ώστε $x = -m$

Άρα $x \in \mathbb{Z}$ και $x < 0$

$\{x \in \mathbb{Z} : x < 0\} \subseteq A \setminus B$

Έστω $x \in \mathbb{Z}$ και $x < 0$. Τότε $x \notin \mathbb{Z}$ και $x \notin \mathbb{N}$

$$B \setminus A = \{x \in X : x \in B \text{ και } x \notin A\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \text{ και } x \notin \mathbb{Z}\}$$
$$= \emptyset$$

Απόδειξη: Έστω $x \in B \setminus A$.

Τότε $x \in \mathbb{N}$ και $x \notin \mathbb{Z}$

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, άρα $x \in \mathbb{Z}$ και $x \notin \mathbb{Z}$

ΑΤΟΠΟ

Άρα $B \setminus A = \emptyset$