Ένωση – Τομή Συνόλων

<u>Ορισμός</u>: Έστω X σύνολο και A, B δύο υποσύνολα του X. $(A, B \subseteq X)$

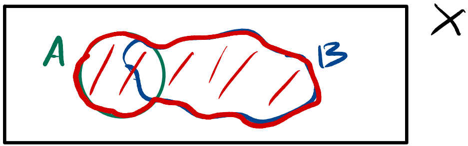
Τότε η ένωση των A, B είναι το σύνολο

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$$
$$= \{x \in X : x \in A \text{ είτε } x \in B\}$$

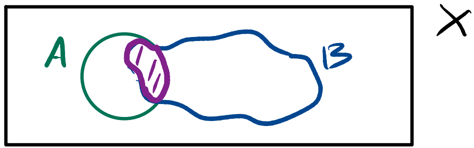
Η τομή των A, B είναι το σύνολο

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$$
$$= \{x \in X : x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Διάγραμμα Venn



$A \cup B$



$A \cap B$

Παράδειγμα : 1

$X = \mathbb{R}$

$A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\} \text{"}=\text{"} (-\infty, 2)$

$B = \{x \in \mathbb{R} : x > -3\} \text{"}=\text{"} (-3, +\infty)$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ και } x \in B\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{ και } x > -3\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : -3 < x < 2\}$

$= (-3, 2)$

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A \vee x \in B\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \in A \text{ είτε } x \in B\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x < 2 \text{ είτε } x > -3\}$

$\boxed{A \cup B = \mathbb{R}}$

$\boxed{\mathbb{R} \subseteq A \cup B}$

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε $x \geq 2$ ή $x < 2$

Αν $x < 2 \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

Αν $x \geq 2 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

$\boxed{A \cup B \subseteq \mathbb{R}}$

Έστω $x \in A \cup B$. Τότε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2: $X = \mathbb{R}$

$$A = \mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$B = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$\boxed{A \cup B = \mathbb{Z}}$

$A \cup B \subseteq \mathbb{Z}$: Έστω $x \in A \cup B$. Τότε $x \in \mathbb{Z}$ είτε $x \in \mathbb{N}$. Τότε $x \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \subseteq A \cup B$: Έστω $x \in \mathbb{Z}$, τότε $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$.

$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : x \in A$ και $x \in B\} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{N}\}$

$A \cap B = \mathbb{N}$

$A \cap B \subseteq \mathbb{N}$: $x \in A \cap B \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \subseteq A \cap B$: $x \in \mathbb{N}$. Αφού $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ και $x \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \in A$ και $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

Πρόταση: Αν $B \subseteq A \subseteq X$

Τότε i) $A \cup B = A$

ii) $A \cap B = B$

Απόδειξη: i) $A \cup B = A$

$\underline{A \subseteq A \cup B}$: Έστω $x \in A$. Τότε $x \in A \cup B$.

$\underline{A \cup B \subseteq A}$: Έστω $x \in A \cup B$.

Τότε, $x \in A$ είτε $x \in B$

$B \subseteq A$, άρα $x \in A$ είτε $x \in A$

$\boxed{\begin{array}{l} p: x \in A \\ p \vee p \equiv p \end{array}}$ → άρα $x \in A$.

ii) $\underline{A \cap B \subseteq B}$:

Έστω $x \in A \cap B$. Τότε $x \in A$ και $x \in B$.

$B \subseteq A$ ⇝ Τότε $x \in A$ και $x \in A$

$\underline{B \subseteq A \cap B}$:

$\left.\begin{array}{l} \text{Έστω } x \in B \\ B \subseteq A, \text{ άρα } x \in A \end{array}\right\} \Rightarrow x \in A$ και $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B$

Άρα, $A \cap B = B$.