

Εργασία 3

1. Να γράψετε την Ευκλείδεια διαίρεση:
 - (i) του 90 με το 7
 - (ii) του -24 με το 3
 - (iii) του 76 με το -9
 - (iv) του -18 με το -5
 - (v) του 15 με το -1
 - (vi) του 40 με το -43
2. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $a = 10q + r$ η Ευκλείδεια διαίρεση του a με το 10. Να βρείτε το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης:
 - (i) του a με το 2
 - (ii) του a με το 5
3. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ με $4|3a+5$. Να αποδείξετε ότι $a = 4k+1$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.
4. Έστω a άρτιος. Τότε $2|(a+1)^2 - 3$.
5. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι
 - (i) Αν a άρτιος, τότε $a^2 = 4l$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$.
 - (ii) Αν b περιττός, τότε $a^2 = 4l + 1$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$.
 - (iii) Αν a, b περιττοί, τότε $x^2 = a^2 + b^2$ δεν έχει λύση στο \mathbb{Z} .
6. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $2 \nmid xy$. Να αποδείξετε ότι:
 - (i) x, y είναι περιττοί.
 - (ii) $2|x^2 + y^2$.
 - (iii) $4 \nmid x^2 + y^2$.
7. Έστω a περιττός και $a^3 + 1 = 4q + r$ η Ευκλείδεια διαίρεση του $a^3 + 1$ με το 4. Να αποδείξετε ότι $r = 0$ ή $r = 2$.