

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4 \mid 9^n - 5^n$

Απόδειξη:  $n=1$ :  $9^1 - 5^1 = 9 - 5 = 4$   
Άρα  $4 \mid 4$

$n=k$ : Έστω ότι  $4 \mid 9^k - 5^k$  ~~(\*)~~

Θα αποδείξω ότι  $4 \mid 9^{k+1} - 5^{k+1}$

$$\begin{aligned} 9^{k+1} - 5^{k+1} &= \underline{9} \cdot 9^k - 5 \cdot 5^k = \\ &= (\underline{4+5}) \cdot 9^k - 5 \cdot 5^k = \\ &= 4 \cdot 9^k + 5 \cdot 9^k - 5 \cdot 5^k = 4 \cdot 9^k + 5 \cdot (9^k - 5^k) \end{aligned}$$

Άρα  $9^{k+1} - 5^{k+1} = 4 \cdot 9^k + 5 \cdot (9^k - 5^k)$  ~~(\*\*)~~

$$\left. \begin{array}{l} 4 \mid 4 \xRightarrow{(6)} 4 \mid 4 \cdot 9^k \\ \textcircled{x} \underline{4 \mid 9^k - 5^k} \xRightarrow{(6)} 4 \mid 5 \cdot (9^k - 5^k) \end{array} \right\} \xRightarrow{(9)} 4 \mid 4 \cdot 9^k + 5 \cdot (9^k - 5^k)$$
$$\xRightarrow{(**)} 4 \mid 9^{k+1} - 5^{k+1} \quad \checkmark$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$   
το  $n^2 + n$  είναι άρτιος.

$n=1$  :  $n^2 + n = 1^2 + 1 = 2$

$2 = 2 \cdot 1$ , άρα 2 είναι άρτιος

$n=k$  : Έστω ότι ο  $k^2 + k$  είναι άρτιος (\*)

Θα αποδείξω ότι  $(k+1)^2 + (k+1)$  είναι άρτιος

$$\begin{aligned}(k+1)^2 + (k+1) &= (k^2 + 2k + 1) + (k+1) \\&= (k^2 + k) + (2k + 1 + 1) \\&= (k^2 + k) + (2k + 2) \\&= (k^2 + k) + 2 \cdot (k+1)\end{aligned}$$

Άρα  $(k+1)^2 + (k+1) = (k^2 + k) + 2 \cdot (k+1)$

(\*)  $k^2 + k$  άρτιος  $\Rightarrow 2 \mid k^2 + k$  } (9)  $\Rightarrow 2 \mid (k^2 + k) + 2 \cdot (k+1)$   
 $2 \mid 2$   $\xrightarrow{(6)} 2 \mid 2 \cdot (k+1)$

Άρα  $2 \mid (k+1)^2 + (k+1)$ , δηλαδή  $(k+1)^2 + (k+1)$  είναι άρτιος ✓

$a$  περιζυτός, αν  $\exists k \in \mathbb{Z}: a = 2k + 1$

Άσκηση:  $a$  περιζυτός  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z}: a = 2\lambda - 1$

Απόδειξη:  $(\Rightarrow)$   $a$  περιζυτός

Τότε  $\exists k \in \mathbb{Z}: a = 2k + 1$

$$a = 2k + 1 = \underline{2k + 2} - 1 = \underline{2 \cdot (k+1)} - 1$$

$\lambda := k+1 \in \mathbb{Z}$ , άρα  $a = 2 \cdot \lambda - 1$

$(\Leftarrow)$  Αν  $a = 2\lambda - 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{Z}$

$$a = 2\lambda - 1 = 2\lambda - 2 + 1 = 2 \cdot \overset{k}{\underbrace{(\lambda - 1)}} + 1$$

$k := \lambda - 1 \in \mathbb{Z}$ , άρα  $a = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

Άσκηση :  $\forall n \in \mathbb{N}, 3 \mid n \cdot (n^2 + 2)$

Αποδείξη :  $n=1$  :  $n \cdot (n^2 + 2) = 1 \cdot (1^2 + 2) = 1 \cdot 3 = 3$   
 $3 \mid 3 \quad \checkmark$

$n=k$  : Έστω ότι  $3 \mid k \cdot (k^2 + 2)$  ~~(\*)~~

Θα αποδείξω ότι  $3 \mid (k+1) \cdot ((k+1)^2 + 2)$

$$\begin{aligned} (k+1) \cdot ((k+1)^2 + 2) &= (k+1) \cdot (k^2 + \underline{2k+1} + 2) \\ &= (k+1) \cdot (\underbrace{(k^2 + 2)}_{k \cdot (k^2 + 2) + (k^2 + 2)} + \underbrace{(2k+1)}_{k \cdot (2k+1) + 1 \cdot (2k+1)}) \\ &= \underbrace{(k+1) \cdot (k^2 + 2)}_{k \cdot (k^2 + 2) + (k^2 + 2)} + \underbrace{(k+1) \cdot (2k+1)}_{k \cdot (2k+1) + 1 \cdot (2k+1)} \\ &= k \cdot (k^2 + 2) + \underline{k^2 + 2} + \underline{2k^2 + k} + \underline{2k + 1} \\ &= k \cdot (k^2 + 2) + 3k^2 + 3k + 3 \\ &= k \cdot (k^2 + 2) + 3 \cdot (k^2 + k + 1) \end{aligned}$$

$(k+1) \cdot ((k+1)^2 + 2) = k \cdot (k^2 + 2) + 3 \cdot (k^2 + k + 1)$

~~(\*\*)~~

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{*} \quad 3 \mid k \cdot (k^2 + 2) \\ 3 \mid 3 \Rightarrow 3 \mid 3 \cdot (k^2 + k + 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \mid k \cdot (k^2 + 2) + 3 \cdot (k^2 + k + 1) \Rightarrow 3 \mid (k+1) \cdot ((k+1)^2 + 2) \quad \textcircled{**}$$

## Άσκηση:

$A \vee$   $n$  άρτιος,  $m$  περιττός, τότε  $\begin{cases} n+m \text{ περιττός} \\ n-m \text{ περιττός} \\ n \cdot m \text{ άρτιος} \end{cases}$

Λόγος:  $n$  άρτιος  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = 2 \cdot k$

$m$  περιττός  $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{Z} : m = 2 \cdot \lambda + 1$

$$n+m = 2 \cdot k + (2\lambda + 1) = (2k + 2\lambda) + 1 = 2 \cdot (k + \lambda) + 1$$

Θέσω  $p := k + \lambda \in \mathbb{Z}$ . Άρα  $n+m = 2 \cdot p + 1$ ,  $n+m$  περιττός

$$n-m = 2k - (2\lambda + 1) = 2k - 2\lambda - 1 = 2(\underbrace{k-\lambda}_{\in \mathbb{Z}}) - 1.$$

Θέσω  $\mu = k - \lambda$

Άρα  $n-m = 2 \cdot \mu - 1$ ,  $\mu \in \mathbb{Z}$

Άρα  $n-m$  περιττός

$$n \cdot m = (2k) \cdot (2\lambda + 1) = 2k \cdot 2\lambda + 2k \cdot 1 = 4k\lambda + 2k = 2 \cdot (2k\lambda + 1)$$

Θέσω  $v := 2k\lambda + 1$ , άρα  $n \cdot m = 2 \cdot v$ ,  $v \in \mathbb{Z}$

Άρα  $n \cdot m$  άρτιος