

Ορισμός: $a \in \mathbb{Z}$

a Περιζωτός, αν $\exists k \in \mathbb{Z} : a = 2 \cdot k + 1$

a άρτιος, αν $\exists k \in \mathbb{Z} : a = 2 \cdot k$

Παράδειγμα: 21 άρτιος / περιζωτός

$$21 \text{ περιζωτός, } 21 = 2 \cdot 10 + 1$$

$$k = 10 \in \mathbb{Z}$$

$$333 \text{ περιζωτός, } 333 = 2 \cdot \underline{166} + 1$$

$k \in \mathbb{Z}$

Ασκηση: Αν $a \in \mathbb{Z}$, α περιζτός

και $2 \leq n \in \mathbb{N}$, τότε $a^n - 1$ είναι
άρτιος.

Λύση:
$$a^n - 1 = (a - 1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

a περιζτός $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = 2k + 1$

$$a^n - 1 = (2k + 1)^n - 1 \stackrel{\otimes}{=} (\underbrace{(2k + 1) - 1}_{\text{green}}) \cdot (\underbrace{(2k + 1)^{n-1} + \dots + 1}_{\text{purple}})$$

Άρα,
$$a^n - 1 = \underbrace{(2k)}_{\text{green}} \cdot (\underbrace{(2k + 1)^{n-1} + \dots + 1}_{\text{purple}})$$

Άρα,
$$a^n - 1 = 2 \cdot \left(\underbrace{k \cdot ((2k + 1)^{n-1} + \dots + 1)}_{\text{purple}} \right)$$

$\Rightarrow a^n - 1 = 2 \cdot \lambda, \lambda \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^n - 1$ άρτιος

Άσκηση: Να αποδείξετε ότι
$$3 \mid 4^n - 1.$$

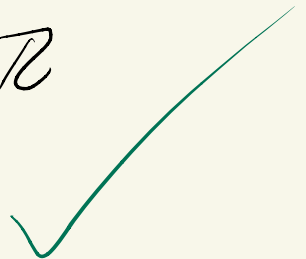
Λύση:

$$4^n - 1 = (4 - 1) \cdot (4^{n-1} + \dots + 4^1 + 1)$$

$$\Rightarrow 4^n - 1 = 3 \cdot \underbrace{(4^{n-1} + \dots + 4^1 + 1)}_{k \in \mathbb{Z}}$$

$$\Rightarrow 4^n - 1 = 3 \underline{k}, \underline{k} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3 \mid 4^n - 1$$



Άσκηση: $3 \mid 7^n - 4^n$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$

Λύση: (Επαγωγή)

$n=1$: $7^n - 4^n = 7^1 - 4^1 = 7 - 4 = 3$

$$3 \mid 3$$

$n=k$: Έστω ότι $3 \mid 7^k - 4^k$ ~~xx~~

$n=k+1$: Θα αποδείξω ότι $3 \mid 7^{k+1} - 4^{k+1}$

$$7^{k+1} - 4^{k+1} = \underline{7} \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k = (\underline{3+4}) \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$$

Επικερσιότητα $\leftarrow = 3 \cdot 7^k + 4 \cdot 7^k - 4 \cdot 4^k$

$$= 3 \cdot 7^k + 4 \cdot (7^k - 4^k)$$

Αρα $7^{k+1} - 4^{k+1} = 3 \cdot 7^k + 4 \cdot (7^k - 4^k)$

Θα αποδείξω ότι $3 \mid \underline{3 \cdot 7^k} + \underline{4 \cdot (7^k - 4^k)}$

$\textcircled{6}$
 $3 \mid \underline{3 \cdot 7^k} = 7^k \cdot 3$

$\textcircled{6}$
 $3 \mid 7^k - 4^k \Rightarrow 3 \mid 4 \cdot (7^k - 4^k)$ $\textcircled{9} \Rightarrow 3 \mid \underline{3 \cdot 7^k} + \underline{4 \cdot (7^k - 4^k)}$

$$3 \mid 7^n - 4^n, \quad n \geq 2$$

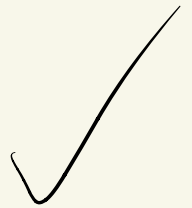
Β Τρόπος :

$$\begin{aligned} 7^n - 4^n &= 7^n - 1 + 1 - 4^n \\ &= (7^n - 1) - (4^n - 1) \end{aligned}$$

Άρα $7^n - 4^n = (7^n - 1) - (4^n - 1)$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \mid 7^n - 1 \text{ (Άσκηση 1)} \\ \downarrow \text{πριζτος} \\ 3 \mid 4^n - 1 \text{ (Άσκηση 2)} \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \mid (7^n - 1) - (4^n - 1)$$

Άρα $3 \mid 7^n - 4^n$



a άρτιος, αν $\exists k \in \mathbb{Z} : a = 2 \cdot k$

a περιττός, αν $\exists k \in \mathbb{Z} : a = 2 \cdot k + 1$

Άσκηση: a άρτιος $\Leftrightarrow 2 \mid a$

Άσκηση: a περιττός $\Leftrightarrow 2 \nmid a$ (δεν διαιρεί το a)

Απόδειξη: (\Rightarrow)

Αν a περιττός, τότε $\exists k \in \mathbb{Z} : \underline{a = 2k + 1}$ ①

Έστω ότι $2 \mid a$

Τότε $\exists \lambda \in \mathbb{Z} : \underline{a = 2 \cdot \lambda}$ ②

Αρα $2k + 1 = 2\lambda$

$\Rightarrow 1 = 2\lambda - 2k \Rightarrow 1 = 2 \cdot (\underbrace{\lambda - k}_{\in \mathbb{Z}}) \Rightarrow 1$ άρτιος
ΑΤΟΤΙΟ

Αρα $2 \nmid a$

(\Leftarrow) Αν $2 \nmid a$. Τότε

???.?