Ορισμός:

Έστω $b \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Τότε ορίζω την συνάρτηση

$$B(n) := b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^{n-(n-1)} + b^{n-n}$$

Παρατήρηση: Αν $n > 2$

τότε

$$B(n) = b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b + 1$$

Παραδείγματα: Έστω $b \in \mathbb{Z}$

$$B(1) = b^{1-1} = b^0 = 1$$

$$B(2) = b^{2-1} + b^{2-2} = b^1 + b^0 = b + 1$$

$$B(3) = b^{3-1} + b^{3-2} + b^{3-3}$$
$$= b^2 + b^1 + b^0$$
$$= b^2 + b + 1$$

$$B(4) = b^{4-1} + b^{4-2} + b^{4-3} + b^{4-4}$$
$$= b^3 + b^2 + b^1 + b^0$$
$$= b^3 + b^2 + b + 1$$

· Αν $b \in \mathbb{Z}$ και $2 \leq n \in \mathbb{N}$, τότε

$$\boxed{b^n - 1 = (b-1)\cdot \underline{\underline{B(n)}} = (b-1)\cdot\underline{\underline{\left(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^{n-(n-1)} + b^{n-n}\right)}}}$$

<u>Απόδειξη</u>: (Επαγωγή)

· <u>Αρχικό Βήμα</u>: $n=2$ $\quad b^2 - 1 = (b-1)\cdot(b+1) = (b-1)\cdot B(2)$

· <u>Επαγωγικό Βήμα</u>: Έστω ότι για $n = k \in \mathbb{N}$ $\quad k > 2$

$$\boxed{b^k - 1 = (b-1)\cdot B(k) = (b-1)\cdot\left(b^{k-1} + b^{k-2} + \ldots + b^{k-(k-1)} + b^{k-k}\right)}$$

Θα αποδείξω ότι για $n = k+1$

$$\boxed{b^{k+1} - 1 = (b-1)\cdot B(k+1) = (b-1)\cdot\left(b^{(k+1)-1} + b^{(k+1)-2} + \ldots + b^{(k+1)-((k+1)-1)} + b^{(k+1)-(k+1)}\right)}$$

$$\boxed{b^{k+1}-1 = (b-1)\cdot\left(b^{(k+1)-1} + b^{(k+1)-2} + \ldots + b^{(k+1)-((k+1)-1)} + b^{(k+1)-(k+1)}\right)} = (b-1)\cdot\left(b^{k} + b^{k-1} + \ldots + b^{1} + \underbrace{b^{0}}_{=1}\right)$$

$$b^{k+1}-1 = b^{k}\cdot b - 1 = b^{k}\cdot b + 0 - 1$$

$$= b^{k}\cdot b - b + b - 1$$

$$= \left(b^{k}\cdot b - b\right) + (b-1)$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$= \boxed{\left(b^{k}-1\right)}\cdot b + (b-1)$$

$$= \boxed{(b-1)\left(b^{k-1} + b^{k-2} + \ldots + b^{k-(k-1)} + b^{k-k}\right)}\cdot b + (b-1)$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$= (b-1)\cdot\left[\left(b^{k-1} + b^{k-2} + \ldots + b^{k-(k-1)} + b^{k-k}\right)\cdot b + 1\right]$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$= (b-1)\cdot\left[\underline{b^{k-1}\cdot b} + \underline{b^{k-2}\cdot b} + \ldots + \underline{b^{k-(k-1)}\cdot b} + \underline{b^{k-k}\cdot b} + 1\right]$$

$$= (b-1)\cdot\left[b^{k} + b^{k-1} + \ldots + b^{2} + b + 1\right]$$

Άσκηση 1: $b \in \mathbb{Z}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$.

Τότε $(b-1) \mid b^n - 1$.

Λύση: Αν $b \in \mathbb{Z}$ και $2 \leq n \in \mathbb{N}$,

τότε $$\boxed{b^n - 1 = (b-1) \cdot \left(b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^{n-(n-1)} + b^{n-n} \right)}$$

Όμως, $b \in \mathbb{Z}$, άρα $b^{n-1} + b^{n-2} + \ldots + b^{n-(n-1)} + b^{n-n} \in \mathbb{Z}$

Δηλαδή, $b^{n-1} = (b-1) \cdot \underbrace{B(n)}_{\in \mathbb{Z}}$, άρα $b-1 \mid b^n - 1$

Άσκηση 2: Αν $a, b \in \mathbb{Z}$, $2 \leq n \in \mathbb{N}$

τότε $$a-1 \mid a^n \cdot b^{n+1} - b^{n+1}$$

Λύση: $$a^n \cdot b^{n+1} - b^{n+1} = (a^n - 1) \cdot b^{n+1}$$

$\downarrow$ επιμεριστική ιδιότητα

Άσκηση 1 $\rightsquigarrow$ $a-1 \mid a^n - 1$

και

$a^n - 1 \mid (a^n - 1) \cdot b^{n+1}$

$$\left.\begin{array}{l} a-1 \mid a^n-1 \\ a^n-1 \mid (a^n-1)\cdot b^{n+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow a-1 \mid (a^n-1) \cdot b^{n+1}$$

$\downarrow$ Μεταβατική ιδιότητα

3) Αν $a, b, \delta \in \mathbb{Z}$, $a \mid b$ και $b \mid \delta^2$, τότε $a \mid \delta^{2026}$

Λύση:

$$a \mid b \text{ και } b \mid d^2 \xRightarrow[10]{\text{(Μεταβατική Ιδιότητα)}} a \mid d^2$$

$$a \mid d^2 \xRightarrow{6} a \mid d^{2024} \cdot d^2 = d^{2026}$$

Άρα, $a \mid d^{2026}$