

$\frac{\pi}{4}$  ακτίνια

$$\widehat{BM} = \widehat{MA}$$

$\widehat{AM}$  και  $\widehat{BM}$  είναι  $\frac{\pi}{4}$  ακτίνια.

$$\widehat{KMA} \longleftrightarrow \frac{\pi}{4} \text{ ακτίνια}$$

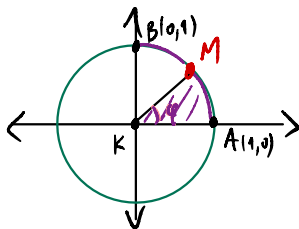
Ερώτηση:

$$\sin \frac{\pi}{4} = ?$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = ?$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = ?$$

$$\cot \frac{\pi}{4} = ?$$



$$\frac{\pi}{4} \longleftrightarrow 45^\circ$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Απόδειξη:

Από το M γέρω ευθεία  $\zeta$  κάθετη στον άξονα  $x'x$ .  $\zeta \perp x'x$

Έστω  $\Gamma$  σημείο τομής της  $\zeta$  με τον άξονα  $x'x$ .

Αφού  $M(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ)$  και  $|KM| = 1$

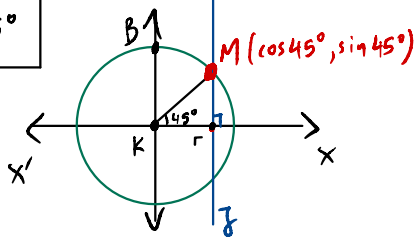
$$\text{έχω } |K\Gamma| = \cos 45^\circ \text{ και } |M\Gamma| = \sin 45^\circ$$

$$\text{Όμως, } \widehat{KM\Gamma} = 180^\circ - \widehat{MK\Gamma} - \widehat{K\Gamma M} = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Άρα, } |K\Gamma| = |M\Gamma| = x$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχω

$$|K\Gamma|^2 + |M\Gamma|^2 = |KM|^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = 1^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\cot \frac{\pi}{4} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \sec \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\csc \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dots = \sqrt{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 \quad \cot \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \quad \csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

## Ερωτήση

$$\sin \frac{\pi}{6} = ?$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = ?$$

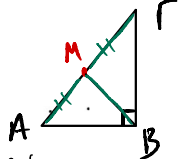
$$\tan \frac{\pi}{6} = ?$$

Θεώρημα: (Θεώρημα Διαμέσου)

Έστω  $\triangle AB\Gamma$  ορθογώνιο τρίγωνο με  $\hat{B} = 90^\circ$ .

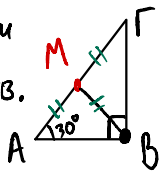
Αν  $M$  το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $A\Gamma$ , τότε  $MB = AM = M\Gamma$

( $MB = \text{διάμεσος}$ )



Πόρισμα 1: Αν επιπλέον υποθέσω

$\hat{BA}\Gamma = 30^\circ$ , τότε το  $\triangle MB\Gamma$  είναι ισόπλευρο, δηλαδή  $MB = M\Gamma = B\Gamma$ .



Πόρισμα 2:

Αν επιπλέον υποθέσω  $\hat{BA}\Gamma = 30^\circ$  και  $|A\Gamma| = 1$ , τότε  $|B\Gamma| = \frac{1}{2}$ .

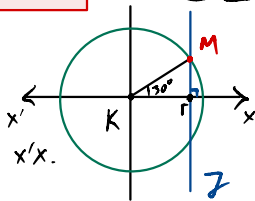
$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} \leftrightarrow 30^\circ$$

Απόδειξη:

Από το  $M$  φέρω ευθεία  $x'x$   $\perp$  κάθετη στον άξονα  $x'x$ .

$\perp x'x$



Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής της  $\perp$  με τον  $x'x$ .

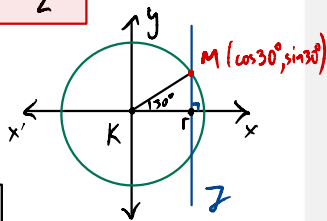
Τότε το τρίγωνο  $K\Gamma M$  είναι ορθογώνιο,  $\angle K\Gamma M = 30^\circ$  και  $|KM| = 1$ .

Άρα, από το Πόρισμα 2 έχω  $|M\Gamma| = \frac{1}{2}$ .

Όμως,  $M(\cos 30^\circ, \sin 30^\circ)$ , άρα  $\sin 30^\circ = |M\Gamma| = \frac{1}{2}$ .

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Απόδειξη:



$$|M\Gamma| = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

και  $|K\Gamma| = \cos 30^\circ$

Το τρίγωνο  $K\Gamma M$  είναι ορθογώνιο,

άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα

έχω  $|K\Gamma|^2 + |M\Gamma|^2 = |KM|^2$

$$\Leftrightarrow |K\Gamma|^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

$$\Leftrightarrow |K\Gamma|^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow |K\Gamma|^2 = \frac{3}{4}$$

Άρα  $|K\Gamma| = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Άρα  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \csc \frac{\pi}{6} = 2$$