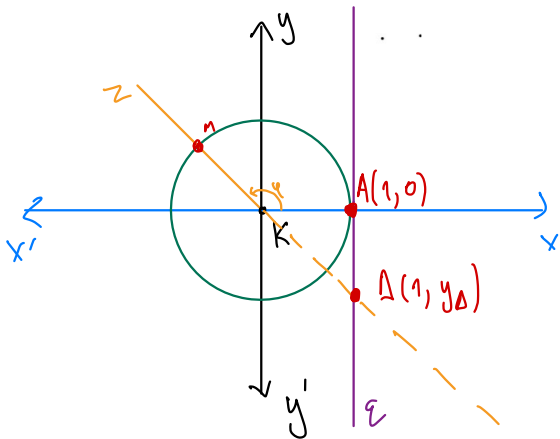


Classwork 1

Αν φ αμβλεία γωνία ($90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$)

$$\text{Τότε } \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Απόδειξη: Έστω φ αμβλεία γωνία.



Έστω M το σημείο τομής του μοναδιαίου κύκλου με την ημιευθεία Kz . Από το σημείο $A(1, 0)$ φέρω ευθεία κάθετη στον άξονα $x'x$.

Προεκτείνω την Kz .

Έστω Δ το σημείο τομής της Kz με την ε .

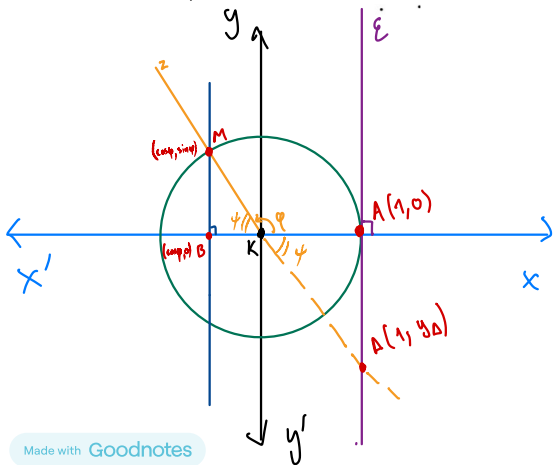
Το Δ έχει συντεταγμένες $(1, y_\Delta)$

$$\text{Ορίσω } \tan \varphi := y_\Delta$$

$$\text{Θα αποδείξω ότι } \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Απόδειξη:

Από το M φέρω ευθεία \mathcal{Z}
κάθετη στον άξονα $x'x$.
Έστω B το σημείο τομής
της \mathcal{Z} με τον $x'x$.



Τα τρίγωνα $K\hat{B}M$ και $K\hat{A}B$
είναι όμοια, από το κριτήριο ΓΓΤ.

($M\hat{K}B = A\hat{K}A = \varphi$ ως κατά κορυφή
γωνίες.)
και $M\hat{B}K = 90^\circ = K\hat{A}A$

Αρα, $K\hat{B}M \sim K\hat{A}B$

Έχω $\frac{|BM|}{|AA|} = \frac{|KB|}{|KA|}$ → προσκείμενη
της φ στο $K\hat{B}M$
→ προσκείμενη
της φ στο $K\hat{A}A$
ατίνανε της φ
στο $K\hat{B}M$
ατίνανε της φ
στο $K\hat{A}A$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{-y_\Delta} = \frac{-\cos \varphi}{1}$$

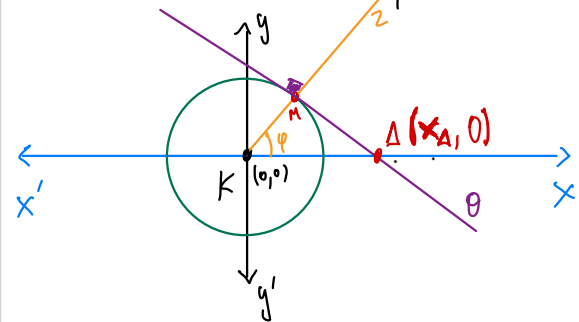
$$\Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{-\cos \varphi} = \frac{-y_\Delta}{1}$$

$$\Leftrightarrow y_\Delta = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \Leftrightarrow \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Τέμνουσα γωνίας / sec

1^ο τεταρτημόριο: Έστω φ οξεία γωνία

$$0 < \varphi < 90^\circ$$



φέρω τον μοναδιαίο κύκλο
Έστω M το σημείο τομής του
κύκλου με την γωνία φ
Από το M φέρω ευθεία κάθετη θ
στην ημιευθεία Kx .

Έστω Δ το σημείο τομής
της ευθείας θ με τον άξονα $x'x$.

Το Δ έχει συντεταγμένες

$$(x_\Delta, 0)$$

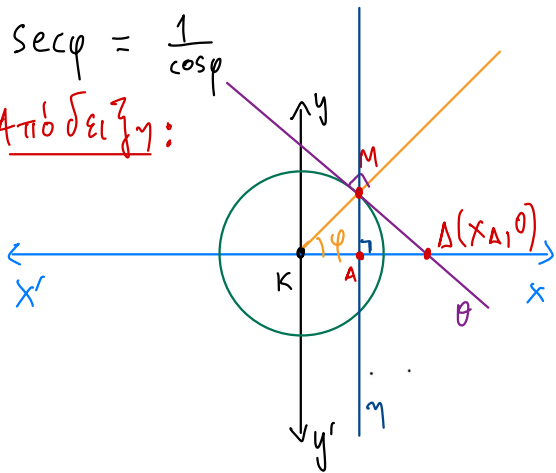
Ορίσω, $\sec \varphi := x_\Delta$

Θα αποδείξω ότι

$$\sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$\sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Απόδειξη:

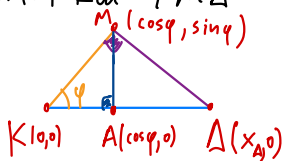


Από το σημείο M φέρω ευθεία
η κάθετη στον $x'x$.

Έστω A το σημείο τομής
της η με τον άξονα $x'x$.

Θεωρώ τα τρίγωνα $\triangle K\hat{A}M$, $\triangle K\hat{M}A$

Τα τρίγωνα $\triangle K\hat{A}M$ και $\triangle K\hat{M}A$
είναι ὅμοια.



από το

κριτήριο ΓΓΓ.

$$\left(\begin{array}{l} \angle K\hat{M}A = 90^\circ = \angle K\hat{A}M \\ \angle M\hat{K}A = \varphi = \angle M\hat{K}A \end{array} \right)$$

Αφού $\triangle K\hat{A}M \sim \triangle K\hat{M}A$ έχω

$$\begin{array}{l} \text{υποτίναγμα} \\ \text{του } \triangle K\hat{A}M \end{array} \leftarrow \frac{|KM|}{|KA|} = \frac{|KA|}{|KM|} \rightarrow \begin{array}{l} \text{προστίμηση της } \varphi \\ \text{στο } \triangle K\hat{A}M \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{υποτίναγμα} \\ \text{του } \triangle K\hat{M}A \end{array} \leftarrow \frac{|KA|}{|KM|} = \frac{|KM|}{|KA|} \rightarrow \begin{array}{l} \text{προστίμηση της } \varphi \\ \text{στο } \triangle K\hat{M}A \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|KA|} = \frac{|KA|}{1} \quad (KM = \text{ακτίνα})$$

$$\frac{1}{|K\Delta|} = \frac{|K\Delta|}{1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{X_{\Delta}} = \frac{\cos \varphi}{1}$$

$$\Leftrightarrow X_{\Delta} = \frac{1}{\cos \varphi} \dots$$

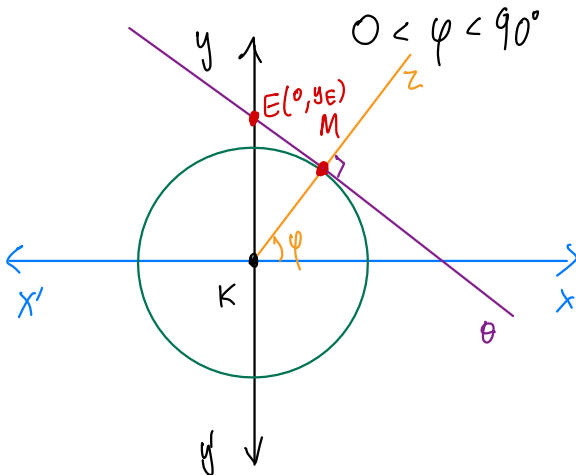
$$\Leftrightarrow \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}$$

Συνζέμνουσα γωνίας

$\operatorname{cosecant} \rightsquigarrow \operatorname{csc}$

συνζέμνουσα

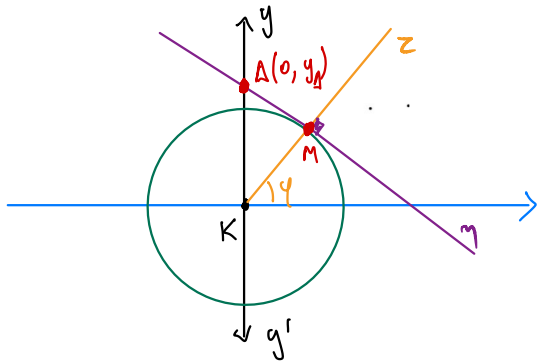
1^ο τεταρτημόριο: Έστω φ οξεία γωνία.



Συνζέμνουσα | cosecant

cosecant \rightarrow CSC \rightarrow συνζέμνουσα

1^ο ζεστατημένο: $\varphi =$ οξεία γωνία.



Έστω M το σημείο τομής της Kz με τον μοναδιαίο κύκλο

Από το M φέρω ευθεία η κάθετη στην Kz .

Έστω Δ το σημείο τομής του άξονα $y'y$ με την ευθεία η . Το Δ έχει συντεταγμένες $(0, y_\Delta)$

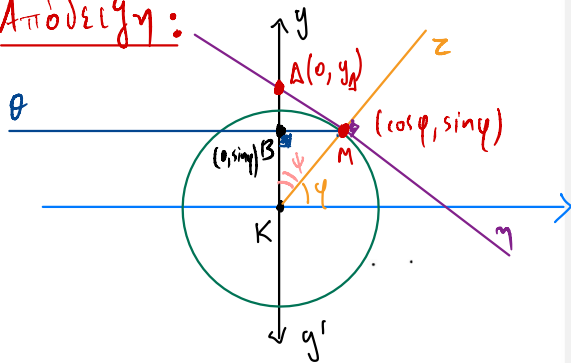
Ορίζω $\text{csc } \varphi := y_\Delta$

Θα αποδείξω ότι $\text{csc } \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}$

\longrightarrow

$$\csc \varphi = \frac{1}{\sin \varphi}$$

Απόδειξη:



Από το σημείο M γέρω ευθεία θ κάθετη στον άξονα $y'y$.
Έστω B το σημείο τομής της ευθείας θ με τον άξονα $y'y$.

Θεωρώ τα τρίγωνα $\triangle KBM$, $\triangle M\Delta A$
Τα τρίγωνα $\triangle KBM$ και $\triangle M\Delta A$
είναι **όμοια**, από το κριτήριο ΓΓΓ
($\angle KBM = \angle M\Delta A$, $\angle KBM = 90^\circ = \angle M\Delta A$)
ή $\hat{M}\hat{A}\hat{Z}$

Από $\triangle KBM \sim \triangle M\Delta A$,

$$\begin{aligned} \text{έχω } \frac{|\Delta K|}{|KM|} &= \frac{|KM|}{|BK|} \rightarrow \begin{array}{l} \text{προσκείμενο} \\ \text{της } \varphi \text{ στο} \\ \triangle M\Delta K \end{array} \\ \text{υποκείμενα} \text{ του } \angle M\hat{A}K & \quad \text{υποκείμενα} \text{ του } \angle M\hat{B}K \\ \frac{y_A}{1} &= \frac{1}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

$\rightarrow \begin{array}{l} \text{προσκείμενο} \\ \text{της } \varphi \\ \text{στο } \triangle KBM \end{array}$

$$\csc \varphi = y_A = \frac{1}{\sin \varphi}$$