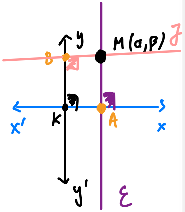
(*) Γιατί $|AM| = |BK|$;



Το τετράπλευρο BKAM είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

$x'x \perp y'y$ και $\varepsilon \perp x'x$ και $\zeta \perp y'y$

Άρα $B\hat{K}A = 90^\circ = K\hat{A}M = K\hat{B}M$

Δηλαδή BKAM ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

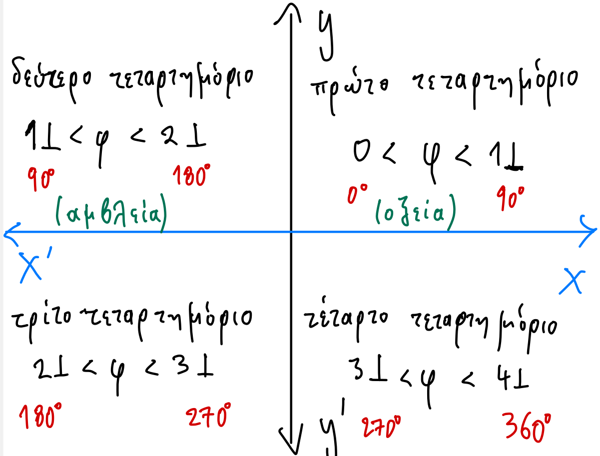
Άρα, $|AM| = |BK|$

Άρα από το (*) έχουμε $\eta\mu\varphi = |BK| = \beta$

Δηλαδή, $\boxed{\eta\mu\varphi = \beta.}$

Παρατήρηση: Η γωνία φ

της απόδειξης ήταν οξεία ($\varphi < 90^\circ = 1\perp$) και ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο.



Ορισμός: Έστω Μ σημείο του επιπέδου και (x, y) οι συντεταγμένες του.

Το x λέγεται τετμημένη του Μ.

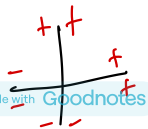
Το y λέγεται τεταγμένη του Μ.

1ο τεταρτημόριο: θετική τετμημένη +
θετική τεταγμένη +

2ο τεταρτημόριο: αρνητική τετμημένη −
θετική τεταγμένη +

3ο τεταρτημόριο: αρνητική τετμημένη −
αρνητική τεταγμένη −

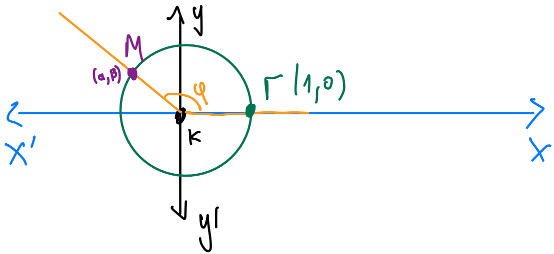
4ο τεταρτημόριο: θετική τετμημένη +
αρνητική τεταγμένη −



Ερώτηση: Πως ορίζω $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ όταν $\varphi > 1 \perp$ $90°$;

Απάντηση:

$0 \leq \varphi < 90°$



Φέρω τον μοναδιαίο κύκλο.

Έστω Μ, Γ τα σημεία τομής του κύκλου με τη γωνία φ.

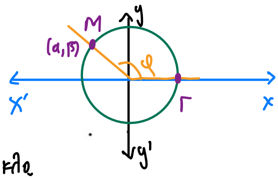
Έστω (α, β) οι συντεταγμένες του Μ.

Ορίζω $\boxed{\cos\varphi = \alpha \quad \text{και} \quad \sin\varphi = \beta}$.

Υπενθύμιση

Αν φ είναι γωνία στο επίπεδο με $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, τότε ορίζω $\cos\varphi$ και $\sin\varphi$ ως εξής:

1) Μεταφέρω τη γωνία στον άξονα $x'x$



2) Φέρω τον μοναδιαίο κύκλο

3) Βρίσκω τα σημεία τομής του κύκλου με την γωνία φ.

4) Ορίζω $\cos\varphi := \alpha$ και $\sin\varphi := \beta$

(τετμημένη του σημείου Μ) (τεταγμένη του σημείου Μ)

Ορισμός:

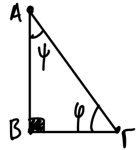
Ο άξονας $x'x$ λέγεται άξονας συνημιτόνων

Ο άξονας $y'y$ λέγεται άξονας ημιτόνων.

Εφαπτομένη | Άξονας εφαπτομένης

Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ορθογώνιο τρίγωνο.

με $\hat{B} = 90^\circ$

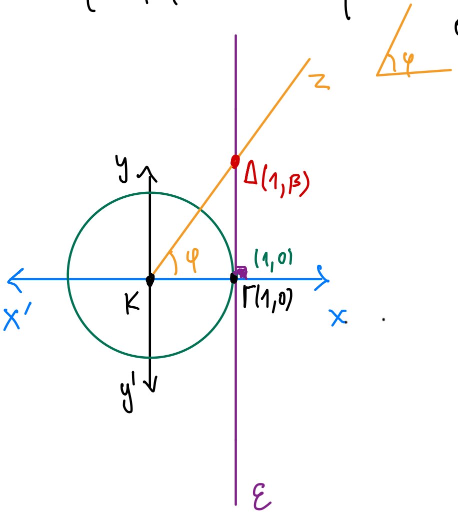


Τότε $\tan\varphi = \dfrac{|AB|}{|B\Gamma|}$

και $\tan\psi = \dfrac{|B\Gamma|}{|AB|}$

1ο τεταρτημόριο: Έστω φ οξεία γωνία

$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$



Φέρω τον μοναδιαίο κύκλο και από το σημείο Γ(1,0) φέρω ευθεία ε κάθετη στον άξονα x'x.

Έστω Δ το σημείο τομής της ευθείας ε με την ημιευθεία Kz.

Οι συντεταγμένες του Δ είναι (1, β).

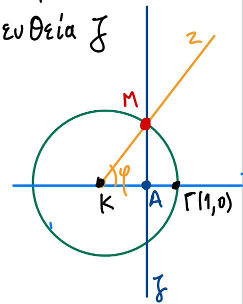
$$\boxed{\text{Θα αποδείξω ότι } \tan\varphi = \beta}$$

Απόδειξη:

Έστω M το σημείο τομής του κύκλου με την ημιευθεία Kz

Από το σημείο M φέρω ευθεία ζ κάθετη στον άξονα x'x.

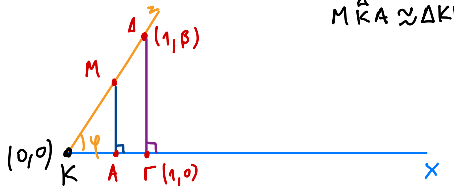
Έστω A το σημείο τομής της ευθείας ζ με τον άξονα x'x.



Θεωρώ τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{MKA}$ και $\overset{\triangle}{\Delta K\Gamma}$

$\overset{\triangle}{MKA}$ και $\overset{\triangle}{ΔKΓ}$ είναι όμοια.

$\overset{\triangle}{MKA} \approx \overset{\triangle}{ΔKΓ}$



Πράγματι, $M\hat{K}A = Δ\hat{K}Γ = φ$.

και $M\hat{A}K = 90^\circ = Δ\hat{Γ}K$

Άρα από το κριτήριο ΓΓΓ

$$\overset{\triangle}{MKA} \approx \overset{\triangle}{ΔKΓ}$$

Άρα έχω

$$\frac{|AM|}{|ΔΓ|} = \frac{|KA|}{|KΓ|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin φ}{|ΔΓ|} = \frac{\cos φ}{|KΓ|}$$

στο $\overset{\triangle}{ΔKΓ}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin φ}{\cos φ} = \frac{|ΔΓ| \to \text{απέναντι πλευρά της } φ}{|KΓ| \to \text{προσκείμενη πλευρά της } φ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin φ}{\cos φ} = \tan φ$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{|ΓΔ|}{|KΔ|}}{\frac{|KΓ|}{|KΔ|}} = \tan φ$$

$\frac{|ΓΔ|}{|KΔ|} \to \sin φ$ στο $\overset{\triangle}{ΔKΓ}$

$\frac{|KΓ|}{|KΔ|} \to \cos φ$ στο $\overset{\triangle}{ΔKΓ}$

$$\Leftrightarrow \frac{|ΓΔ|}{|KΓ|} = \tan φ \Leftrightarrow \frac{β}{1} = \tan φ \Leftrightarrow \boxed{β = \tan φ}$$

$\to$ KΓ ακτίνα του ○

Made with Goodnotes