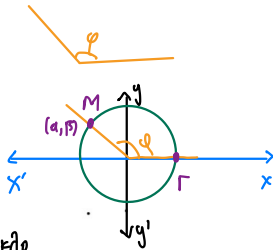


Υπενθύμιση

Αν φ είναι γωνία στο επίπεδο με $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, τότε ορίζω $\cos \varphi$ και $\sin \varphi$ ως εξής:



1) Μεταφέρω τη γωνία στον άξονα $x'x$

2) φέρω τον μοναδιαίο κύκλο

3) βρίσκω τα σημεία τομής του κύκλου με την γωνία φ .

4) Ορίζω $\cos \varphi := a$ και $\sin \varphi := b$
(τεταγμένη του σημείου M) (τεταγμένη του σημείου M)

Ορισμός:

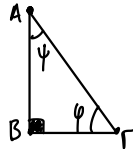
Ο άξονας $x'x$ λέγεται **άξονας συνημιτόνων**

Ο άξονας $y'y$ λέγεται **άξονας ημιτόνων**.

Εφαπτομένη | Άξονας εφαπτομένης

Έστω $\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο.

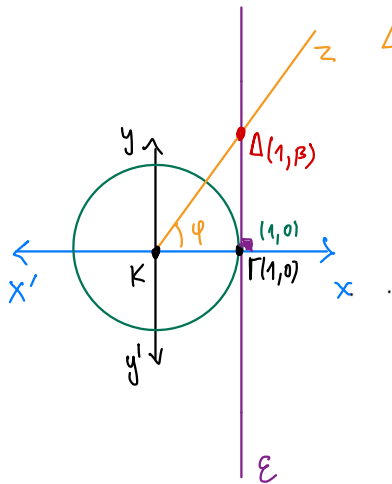
με $\hat{B} = 90^\circ$



$$\text{Τότε } \tan \varphi = \frac{|AB|}{|\Gamma B|}$$

$$\text{και } \tan \psi = \frac{|\Gamma B|}{|AB|}$$

1ο ζήτημα: Έστω φ οξεία γωνία $0^\circ < \varphi < 90^\circ$



Φέρω τον μοναδιαίο κύκλο και από το σημείο $\Gamma(1,0)$ φέρω ευθεία ε κάθετη στον άξονα $x'x$.

Έστω Δ το σημείο τομής της ευθείας ε με την ημιευθεία Kz .

Οι συντεταγμένες του Δ είναι $(1, \beta)$.

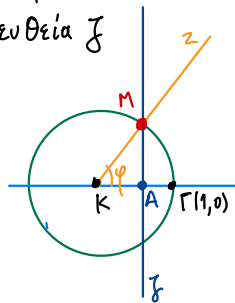
Θα αποδείξω ότι $\tan \varphi = \beta$

Απόδειξη:

Έστω M το σημείο τομής του κύκλου με την ημιευθεία Kz .

Από το σημείο M φέρω ευθεία ζ κάθετη στον άξονα $x'x$.

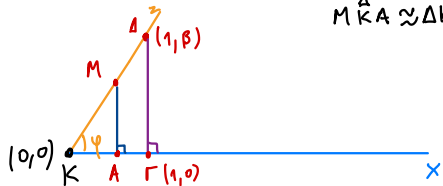
Έστω A το σημείο τομής της ευθείας ζ με τον άξονα $x'x$.



Θεωρώ τα τρίγωνα

$\triangle MKA$ και $\triangle K\Gamma$

$\triangle^A K A$ και $\triangle^A K \Gamma$ είναι όμοια.
 $\triangle^A K A \approx \triangle^A K \Gamma$



Πράγματι, $\hat{MKA} = \hat{AK\Gamma} = \varphi$.

και $\hat{MAK} = 90^\circ = \hat{\Gamma K}$

Άρα από το κριτήριο ΓΓΓ.

$$\triangle^A K A \approx \triangle^A K \Gamma$$

Άρα έχω

$$\frac{|AM|}{|A\Gamma|} = \frac{|KA|}{|K\Gamma|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{|A\Gamma|} = \frac{\cos \varphi}{|K\Gamma|}$$

στο $\triangle^A K \Gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{|A\Gamma|}{|K\Gamma|} \rightarrow \begin{array}{l} \text{απέναντι πλευρά της } \varphi \\ \text{προσκείμενη πλευρά της } \varphi \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$$

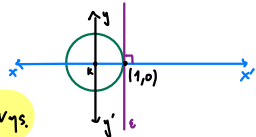
$\sin \varphi$ στο $\triangle^A K \Gamma$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{|A\Gamma|}{|K\Gamma|}}{\frac{|KA|}{|K\Gamma|}} = \tan \varphi \rightarrow \cos \varphi \text{ στο } \triangle^A K \Gamma$$

$$\Leftrightarrow \frac{|A\Gamma|}{|K\Gamma|} = \tan \varphi \Leftrightarrow \frac{\beta}{1} = \tan \varphi \Leftrightarrow \boxed{\beta = \tan \varphi}$$

$\rightarrow K\Gamma$ ακτίνα του \odot

Ορισμός: Η ευθεία ε



θα λέγεται άξονας εφαπτομένης.

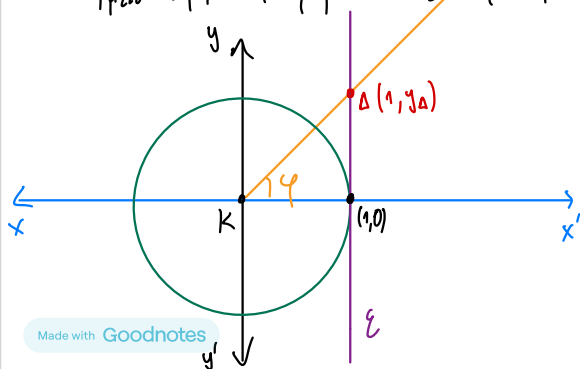
Συμπέρασμα: Η εφαπτομένη μιας οξείας

γωνίας φ μπορεί να οριστεί διαφορετικά.


Έστω  οξεία γωνία.

Τότε $\tan \varphi :=$ τεταγμένη του σημείου $\Delta = y_{\Delta}$

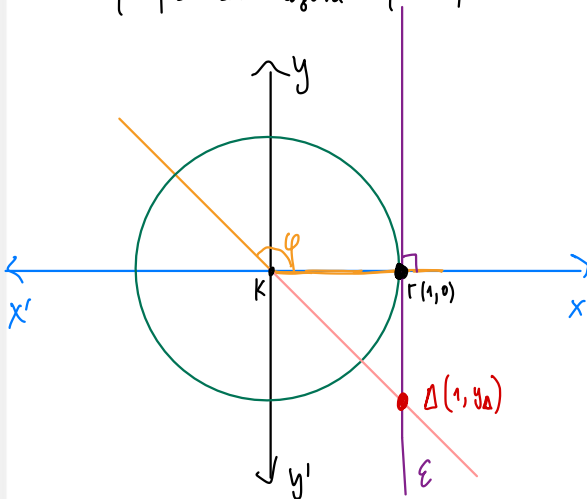
Δ = σημείο τομής της φ με τον άξονα εφαπτομένης



Ερώτηση: Πως ορίζω $\tan \varphi$ όταν φ είναι αμβλεία γωνία; ($90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$)

Απάντηση: Έστω  αμβλεία

Τότε $\tan \varphi := y_{\Delta}$ όπου Δ σημείο τομής της φ με τον άξονα εφαπτομένης.



Classwork

Αν φ αμβλεία γωνία ($90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$)

$$\text{Τότε } \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Απόδειξη: