Άσκηση: Να αποδείξετε τα παρακάτω.

① $((\alpha+\beta)+\gamma)+\delta = \beta + (\alpha + (\delta+\gamma))$

Λύση: $((\alpha+\beta)+\gamma)+\delta \overset{1}{=} ((\beta+\alpha)+\gamma)+\delta$

$\overset{2}{=} (\beta+(\alpha+\gamma))+\delta$

$\overset{3}{=} \beta+((\alpha+\gamma)+\delta)$

$\overset{4}{=} \beta+(\alpha+(\gamma+\delta))$

$\overset{5}{=} \beta+(\alpha+(\delta+\gamma))$

① Αντιμεταθετική

$\square+\Delta=\Delta+\square$

$\square=\alpha,\ \Delta=\beta$

② Προσεταιριστική

$(\square+\Delta)+O=\square+(\Delta+O)$

$\square=\beta,\ \Delta=\alpha,\ O=\gamma$

③ Προσεταιριστική

$(\square+\Delta)+O=\square+(\Delta+O)$

$\square=\beta,\ \Delta=(\alpha+\gamma),\ O=\delta$

④ Προσεταιριστική

$(\square+\Delta)+O=\square+(\Delta+O)$

$\square=\alpha,\ \Delta=\gamma,\ O=\delta$

⑤ Αντιμεταθετική

$\square+\Delta=\Delta+\square,\ \square=\gamma,\ \Delta=\delta$

② $((\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma)\cdot\delta = \beta\cdot(\gamma\cdot(\delta\cdot\alpha))$

Λύση: $((\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma)\cdot\delta = ((\beta\cdot\alpha)\cdot\gamma)\cdot\delta$

Αντιμεταθετική

$\square=\alpha,\ \Delta=\beta$

$= (\beta\cdot(\alpha\cdot\gamma))\cdot\delta$

Προσεταιριστική

$\square=\beta,\ \Delta=\alpha,\ O=\gamma$

$= (\beta\cdot(\gamma\cdot\alpha))\cdot\delta$

Αντιμεταθετική

$\square=\alpha,\ \Delta=\gamma$

$= \beta\cdot((\gamma\cdot\alpha)\cdot\delta)$

Προσεταιριστική

$\square=\beta,\ \Delta=(\gamma\cdot\alpha),\ O=\delta$

$= \beta\cdot(\gamma\cdot(\alpha\cdot\delta))$

Προσεταιριστική

$\square=\gamma,\ \Delta=\alpha,\ O=\delta$

$= \beta\cdot(\gamma\cdot(\delta\cdot\alpha))$

Αντιμεταθετική $\square=\alpha,\ \Delta=\delta$

③ $((\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma)\cdot\delta = ((\delta\cdot\beta)\cdot\gamma)\cdot\alpha$

Λύση:

Αντιμεταθετική

$\square = ((\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma),\ \Delta = \delta$

$$((\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma)\cdot\delta = \delta\cdot((\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma)$$

Αντιμεταθετική $\square=\alpha,\ \Delta=\beta$

$$= \delta\cdot((\beta\cdot\alpha)\cdot\gamma)$$

Προσεταιριστική $\square=\beta,\ \Delta=\alpha,\ \bigcirc=\gamma$

$$= \delta\cdot(\beta\cdot(\alpha\cdot\gamma))$$

Αντιμεταθετική $\square=\alpha,\ \Delta=\gamma$

$$= \delta\cdot(\beta\cdot(\gamma\cdot\alpha))$$

Προσεταιριστική $\square=\beta,\ \Delta=\gamma,\ \bigcirc=\alpha$

$$= \delta\cdot((\beta\cdot\gamma)\cdot\alpha)$$

Προσεταιριστική $\square=\delta,\ \Delta=(\beta\cdot\gamma),\ \bigcirc=\alpha$

$$= (\delta\cdot(\beta\cdot\gamma))\cdot\alpha$$

Προσεταιριστική $\square=\delta,\ \Delta=\beta,\ \bigcirc=\gamma$

$$= ((\delta\cdot\beta)\cdot\gamma)\cdot\alpha$$