Γ′ Τρίμηνο-Εργασία 2

Προσεταιριστική Ιδιότητα: Για κάθε τριάδα αριθμών α, β, γ ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

- $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

$\big(\square + \triangle\big) + \bigcirc = \square + \big(\triangle + \bigcirc\big)$ και $\big(\square \cdot \triangle\big) \cdot \bigcirc = \square \cdot \big(\triangle \cdot \bigcirc\big)$

Αντιμεταθετική Ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος αριθμών α, β ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$

$\square + \triangle = \triangle + \square$ και $\square \cdot \triangle = \triangle \cdot \square$

Έστω $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ αριθμοί. Να αποδείξετε πως ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες.

1. $(\alpha + \beta) - \gamma = \alpha + (\beta - \gamma)$

   Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) - \gamma &= (\alpha + \beta) + (-\gamma) \\ &=^{(*)} \alpha + (\beta + (-\gamma)) \\ &= \alpha + (\beta - \gamma)\end{aligned}$$

   Από την προσεταιριστική ιδιότητα: $\big(\square + \triangle\big) + \bigcirc = \square + \big(\triangle + \bigcirc\big)$

   $(*) : \square = \alpha, \triangle = \beta, \bigcirc = -\gamma$

2. $(\alpha - \beta) - \gamma = \alpha + (-\beta - \gamma)$

3. $(-\alpha + \beta) + \gamma = -\alpha + (\beta + \gamma)$

4. $(-\alpha + \beta) - \gamma = -\alpha + (\beta - \gamma)$

5. $\big((-\alpha) + (-\beta)\big) - \gamma = -\alpha + (-\beta - \gamma)$

6. $\big((-\alpha) \cdot (-\beta)\big) \cdot (-\gamma) = (-\alpha) \cdot (\beta \cdot \gamma)$

7. $\alpha - \beta = -\beta + \alpha$

8. $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$

9. $-\alpha - \beta = -\beta - \alpha$

10. $\alpha - \beta + \gamma = -\beta + \gamma + \alpha$

11. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha \cdot \beta)$

12. $(\alpha + \beta) + \gamma = \gamma + (\beta + \alpha)$

13. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = (\beta \cdot \gamma) \cdot \alpha$

14. $\big((-\alpha) \cdot (-\beta)\big) \cdot \gamma = \alpha \cdot \big(\beta \cdot \gamma\big)$

15. $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha = \alpha^2 \cdot \beta$

16. $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha^2$

17. $\alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha = \alpha^3 \cdot \beta^2$

18. $\alpha \cdot \beta \cdot (-\alpha) \cdot \beta \cdot \alpha = -\alpha^3 \cdot \beta^2$

19. $(-\alpha)^4 \cdot \beta^4 = \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \beta$

20. $\alpha + \beta - \alpha + \beta + \alpha - \beta = \beta + 2\alpha$

21. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \gamma \cdot (\alpha + \beta)$

22. $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = (\delta + \gamma) \cdot (\alpha + \beta)$

23. $(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = (\delta + \gamma) \cdot (\beta + \alpha)$

24. $\big((-\alpha) \cdot (-\beta)\big) + (\gamma \cdot \delta) = (\delta \cdot \gamma) + (\alpha \cdot \beta)$

25. $\big((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma\big) \cdot \delta = \alpha \cdot \big(\beta \cdot (\gamma \cdot \delta)\big)$

26. $\big((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma\big) \cdot \delta = \alpha \cdot \big(\beta \cdot (\delta \cdot \gamma)\big)$

27. $\big((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma\big) \cdot \delta = \beta \cdot \big(\alpha \cdot (\delta \cdot \gamma)\big)$

28. $\big((\alpha+\beta)+\gamma\big)+\delta=\beta+\big(\alpha+(\delta+\gamma)\big)$

29. $\big((\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\delta+\epsilon)\big)\cdot\zeta=\big((\delta+\epsilon)\cdot\zeta\big)\cdot(\alpha+\gamma+\beta)$

30. $\big((\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)+(\delta+\epsilon)\big)+\zeta=\big((\delta+\epsilon)+\zeta\big)+(\alpha\cdot\gamma\cdot\beta)$

31. $\Big(\big((\alpha+\beta)+\alpha\big)+\beta\Big)+\alpha=\alpha+\Big((\beta+\alpha)+(\beta+\alpha)\Big)$