Διακριτά Μαθηματικά
Study Guide

1. Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

   (i) $a \,|\, a$

   (ii) $1 \,|\, a$

   (iii) $a \,|\, 1 \iff |a| = 1$

   (iv) $a \,|\, 0$

   (v) $0 \,|\, a \iff a = 0$

   (vi) Αν $a \,|\, b$ και $b \,|\, c$, τότε $a \,|\, c$

   (vii) Αν $a \,|\, b$ και $b \neq 0$, τότε $|a| \leq |b|$

   (viii) Αν $a \,|\, b$ και $b \,|\, a$, τότε $|a| = |b|$

   (ix) Αν $a \,|\, b$, τότε $a \,|\, b \cdot c$

   (x) Αν $a \,|\, b$ και $a \,|\, c$, τότε $a \,|\, b \cdot c + d \cdot c$

   (xi) Αν $a \,|\, b$ και $c \,|\, d$, τότε $a \cdot c \,|\, b \cdot d$

2. Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$ με $x \,|\, 4y + 3$ και $x \,|\, 7y - 2x - 1$. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του x

3. Έστω $b, c \in \mathbb{Z}$ με $5 \,|\, 4b + 3$ και $5 \,|\, 2 - 3c$. Να αποδείξετε ότι $5 \,|\, 28b + 9c$

4. Έστω $m, n \in \mathbb{Z}$ με $6 \,|\, 10m - 4n$. Να αποδείξετε ότι $6 \,|\, 4m + 2n$

5. Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

   i Αν x άρτιος και y άρτιος, τότε οι $x + y, x - y, xy$ είναι άρτιοι

   ii Αν x άρτιος και y περιττός, τότε οι $x + y, x - y$ είναι περιττοί και ο xy είναι άρτιος

   iii Αν x περιττός και y περιττός, τότε οι $x + y, x - y$ είναι άρτιοι και ο xy είναι περιττός

6. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $a^2 = 5q + r$ η ευκλείδια διαίρεση του a^2 με το 5. Να αποδείξετε ότι $r = 0,\ 1,$ ή 4

7. Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι ΔΕΝ υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $a^2 = 3n - 1$

8. Να βρείτε την κανονική μορφή και το μκδ και το εκπ των παρακάτω αριθμών:

   (i) 900 και 210

   (ii) 8660 και 5300

   (iii) 454, 680 και 9320

   (iv) 750, 869 και 5578

9. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Αν μκδ$(14n, 20) = 4$, να αποδείξετε ότι εκπ$(14n, 20) = 70n$

10. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι μκδ$(5n + 7, 3n + 2) = 1$ ή 11

11. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Αν μκδ$(3a, b) = 1$, να αποδείξετε ότι μκδ$(20a + b, a) = 1$

12. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι μκδ$(6n + 1, 5n + 1) = 1$

13. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι εκπ$(2n + 1, 9n + 4) = 18n^2 + 17n + 4$

14. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι μκδ $\left(2n + 1, \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = 1$

15. Έστω $x \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε (με επαγωγή) ότι:
    (i) Αν x άρτιος, τότε x^n είναι άρτιος για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (ii) Αν x περιττός, τότε x^n είναι περιττός για κάθε $n \in \mathbb{N}$

16. Έστω $x \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι:
    (i) Αν x^n άρτιος, τότε x είναι άρτιος
    (ii) Αν x^n περιττός, τότε x είναι περιττός

17. Να γράψετε με συμβολισμό Σ τα παρακάτω αθροίσματα και να αποδείξετε με επαγωγή ότι:
    (i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (iv) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (v) $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (vi) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
    (vii) $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} = \dfrac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 1, -1$

18. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ και $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ με $x_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots n$.
Να γράψετε με συμβολισμό Σ τα αθροίσματα και να αποδείξετε ότι:

(i) $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots + \log x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $|y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n| \leq |y_1| + |y_2| + |y_3| + \ldots + |y_n|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{y_1} = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{y_1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

19. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

(i) $2^n > n + 4$ για κάθε $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

(ii) $3n^2 > 2n + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $4^n > n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iv) $\sum\limits_{r=1}^{n} \frac{1}{r^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(v) $(2n)! > 2^n (n!)^2$

20. Έστω $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ με $f(1) = 1$ και $f(n+1) = f(n) + 2\sqrt{f(n)} + 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.
Να αποδείξετε ότι $f(n) = n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

21. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

(i) $8 \,|\, 3^{2n} - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(ii) $2 \,|\, n^2 + n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(iii) $6 \,|\, n^3 - n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(iv) $11 \,|\, 27 \cdot 23^n + 17 \cdot 10^{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

22. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1, 2, 3, \ldots, 2021, 2022\}$:

(i) διαιρούνται με 3 και με 5

(ii) διαιρούνται με 3 ή με 5

(iii) διαιρούνται με 2 ή με 3 ή με 5

(iv) διαιρούνται με 18 ή με 26 ή με 34

(v) δεν διαιρούνται με 6 και δεν διαιρούνται με 28

(vi) δεν διαιρούνται με 14 ή δεν διαιρούνται με 20 ή δεν διαιρούνται με 30

23. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1000, 1001, 1003, \ldots, 2021, 2022\}$:

(i) διαιρούνται με 3 και με 5

(ii) διαιρούνται με 3 ή με 5

(iii) διαιρούνται με 2 ή με 3 ή με 5

(iv) δεν διαιρούνται με 6 ή δεν διαιρούνται με 28

(v) δεν διαιρούνται με 6 και δεν διαιρούνται με 28

(vi) δεν διαιρούνται με 14 ή δεν διαιρούνται με 20 ή δεν διαιρούνται με 30

(vii) δεν διαιρούνται με 14 και δεν διαιρούνται με 20 και δεν διαιρούνται με 30

24. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1, 2, 3, \ldots, 2021, 2022\}$:

(i) είναι σχετικά πρώτοι με το 5

(ii) είναι σχετικά πρώτοι με το 2 ή με το 5

(iii) είναι σχετικά πρώτοι με το 2 ή με το 3 ή με το 5

(iv) είναι σχετικά πρώτοι με το 10

(v) είναι σχετικά πρώτοι με το 15 ή με το 6

25. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1789, 1790, 1791, \ldots, 2021, 2022\}$:

(i) είναι σχετικά πρώτοι με το 5

(ii) είναι σχετικά πρώτοι με το 2 ή με το 5

(iii) είναι σχετικά πρώτοι με το 2 ή με το 3 ή με το 5

(iv) είναι σχετικά πρώτοι με το 10

(v) είναι σχετικά πρώτοι με το 15 ή με το 6