

Διακριτά Μαθηματικά
Μαθηματική Επαγωγή
Εργασία 3η

1. Να αποδείξετε ότι:

(i) $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \dots + (-1)^i \cdot i^2 = \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (n+1)}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+4)}{6}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

2. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και A_1, A_2, \dots, A_n σύνολα.

Να αποδείξετε ότι $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \dots \cap A_n^c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

3. Να αποδείξετε ότι $n^2 \geq 5n + 5$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$.

4. Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $0 < x < 1$. Να αποδείξετε ότι $(1-x)^n \geq 1-nx$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Να αποδείξετε ότι $n! > 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Δίνεται ότι: $0! = 1$, $1! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ για $n \geq 2$ και $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ για $n \in \mathbb{N}$

6. Να αποδείξετε ότι το $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

7. Να αποδείξετε ότι το $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

8. Έστω $x \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι $x-1 \mid x^n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.