

Διακριτά Μαθηματικά
Θεωρία Αριθμών
Εργασία 3η

1. Να γράψετε την ευκλείδεια διαίρεση:

- (i) του 90 με το 7
- (ii) του 76 με το -9
- (iii) του -24 με το 3
- (iv) του -18 με το -5
- (v) του -15 με το -1
- (vi) του 40 με το -43

2. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $a = 10q + 7$ η ευκλείδεια διαίρεση του a με το 10.

Να βρείτε το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης (r) του a :

- (i) με το 2
- (ii) με το 5

3. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ με $4 \mid 3a + 5$. Να αποδείξετε ότι $a = 4k + 1$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.

4. Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι $2 \mid (a + 1)^2 - 3$.

5. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

- (i) Αν a είναι άρτιος, τότε $a^2 = 4l$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$
- (ii) Αν a είναι περιττός, τότε $a^2 = 4l + 1$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$
- (iii) Αν a, b περιττοί, τότε η εξίσωση $x^2 = a^2 + b^2$ δεν έχει λύσεις στο \mathbb{Z} .

6. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $2 \nmid xy$. Να αποδείξετε ότι:

- (i) x, y είναι περιττοί
- (ii) $2 \mid x^2 + y^2$
- (iii) $4 \nmid x^2 + y^2$

7. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $a^3 + 1 = 4q + r$ η ευκλείδεια διαίρεση του $a^3 + 1$ με το 4.

Να αποδείξετε ότι $r = 0$ ή $r = 1$ ή $r = 2$.