Διακριτά Μαθηματικά

Μαθηματική Επαγωγή

Εργασία 2η

1. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

   (i) $\displaystyle\sum_{i=k}^{k} x_i = x_k$ για κάθε $1 \leq k \leq n$

   (ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i$ για κάθε $1 \leq k \leq n-1$

   (iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c = cn$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$

   (iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$

   (v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} cx_i = c\sum_{i=1}^{n} x_i$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$

   (vi) $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i$ για κάθε $1 \leq k \leq n$

2. Να γράψετε με το συμβολισμό Σ τα παρακάτω αθροίσματα:

   (i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ για $n \in \mathbb{N}^*$

   (ii) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \ldots + (n-1) \cdot (n+1)$ για $n \in \mathbb{N}^*$

   (iii) $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots + \log 4096$

   (iv) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \ldots + \dfrac{2021}{2022}$

   (v) $\sin(\frac{2\pi}{3}) + \sin(\frac{3\pi}{9}) + \sin(\frac{4\pi}{27}) + \ldots + \sin(\frac{k\pi}{3^{k-1}})$ για $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$

   (vi) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + 2021 \cdot 2023$

   (vii) $3 - 7 + 11 - 15 + 19 - \ldots - 2023$

3. Να γράψετε με συμβολισμό Σ τα παρακάτω αθροίσματα και να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

(i) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(ii) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $2 + 5 + 8 + \ldots + 3n - 1 = \dfrac{n \cdot (3n+1)}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iv) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \dfrac{(-1)^n}{2^n} = \dfrac{(-\frac{1}{2})^n + 2}{3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

(v) Αν $x_i \in \mathbb{R}$ με $x_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε
$\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots + \log x_n = \log(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$