

Διακριτά Μαθηματικά
Θεωρία Αριθμών
Εργασία 2η

1. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $a = 10q + 7$ η ευκλείδια διαίρεση του a με το 10. Να βρείτε το υπόλοιπο της ευκλείδιας διαίρεσης (r) του a :
 - (i) με το 2
 - (ii) με το 5
2. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ με $4 \mid 3a + 5$. Να αποδείξετε ότι $a = 4k + 1$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$.
3. Έστω $a \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι $2 \mid (a+1)^2 - 3$.
4. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:
 - (i) Άντι a είναι άρτιος, τότε $a^2 = 4l$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$
 - (ii) Άντι a είναι περιττός, τότε $a^2 = 4l + 1$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$
 - (iii) Άντι a, b περιττοί, τότε η εξίσωση $x^2 = a^2 + b^2$ δεν έχει λύσεις στο \mathbb{Z} .
5. Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $2 \nmid xy$. Να αποδείξετε ότι:
 - (i) x, y είναι περιττοί
 - (ii) $2 \mid x^2 + y^2$
 - (iii) $4 \nmid x^2 + y^2$
6. Έστω $a \in \mathbb{Z}$ και $a^3 + 1 = 4q + r$ η ευκλείδια διαίρεση του $a^3 + 1$ με το 4.
Να αποδείξετε ότι $r = 0$ ή $r = 1$ ή $r = 2$.