Διακριτά Μαθηματικά

Μαθηματική Επαγωγή

Εργασία 1η

1. Να αποδείξετε ότι:

   (i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

   (ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

   (iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2. Να αποδείξετε ότι:

   $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

3. Να αποδείξετε ότι:

   (i) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} \cdot a^{x_3} \cdot \ldots \cdot a^{x_\nu} = a^{x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu} \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$, όπου $a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$

   (ii) $|x_1 + x + _2 + x_3 + \ldots + x_\nu| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_\nu| \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}^*$, όπου $x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$

   (iii) $\tan(\nu \cdot \pi) = 0 \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$

   Δίνεται ότι:

   1. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
   2. $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$
   3. $\tan(\theta + \varphi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta \cdot \tan\varphi} \quad \forall\, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$ και $\tan 0 = 0,\ \tan\pi = 0$