Διακριτά Μαθηματικά

Study Guide

1. Να κατασκευάσετε το δένδρο ανάλυσης και τον πίνακα αληθειας για τις παρακάτω προτάσεις:

   (i) $(\varphi \Longrightarrow \psi) \wedge \big((\neg\,\psi) \vee \varphi\big)$

   (ii) $(p \Longleftrightarrow q) \Longrightarrow \big(\neg(p \wedge q)\big)$

   (iii) $\big(a \Longrightarrow (b \wedge c)\big) \Longleftrightarrow \big((\neg\,b) \Longrightarrow (a \vee c)\big)$

   (iv) $\big((\neg\,s) \vee (\neg\,u)\big) \Longleftrightarrow \Big(t \Longrightarrow \Big(s \wedge \big(t \Longleftrightarrow (\neg\,u)\big)\Big)\Big)$

2. Να κατασκευάσετε το δένδρο ανάλυσης και τον πίνακα αληθειας για την πρόταση:

   $$\Big(p \Longrightarrow \big(q \vee (\neg\,r)\big)\Big) \Longleftrightarrow \Big((p \Longrightarrow q) \vee \big(p \Longrightarrow (\neg\,r)\big)\Big)$$

   Να αποδείξετε ότι είναι ταυτολογία.

3. Να κατασκευάσετε το δένδρο ανάλυσης και τον πίνακα αληθειας για την πρόταση:

   $$\Big((\neg\,\varphi) \wedge \big(\neg\,(\psi \Longleftrightarrow \chi)\big)\Big) \Longleftrightarrow \big(\varphi \vee (\psi \Longleftrightarrow \chi)\big)$$

   Να αποδείξετε ότι είναι αντίφαση.

4. Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές:

   (i) 65_{10} σε βάση 2

   (ii) 138_{10} σε βάση 6

   (iii) 290_{10} σε βάση 9

   (iv) 99_{10} σε βάση 3

   (v) 1001000010001_{2} σε βάση 10

   (vi) 4313_{5} σε βάση 10

   (vii) 634_{7} σε βάση 10

   (viii) 7521_{8} σε βάση 10

5. Έστω τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ και $\Gamma = \{1, 4, 6, 8, 10\}$. Να βρείτε τα σύνολα:

(i) $A \cap B$

(ii) $A \cap \Gamma$

(iii) $B \cup \Gamma$

(iv) $A - B$

(v) $A - (B \cup \Gamma)$

(vi) $(A - B) \cup \Gamma$

(vii) $(A - B) \cap \Gamma$

(viii) $(B \cup \Gamma) - A$

(ix) $\big(A - (B \cup \Gamma)\big) \times \big(A - (B \cup \Gamma)\big)$

(x) $\Big(\big(A - (B \cup \Gamma)\big) \times \big(A - (B \cup \Gamma)\big)\Big) \times \big((B \cup \Gamma) - A\big)$

6. Να βρείτε τα σύνολα:

(i) $\mathbb{R} \cap (\mathbb{Z} \cup \mathbb{N})$

(ii) $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \big(\mathbb{Q} - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})\big)$

(iii) $\big(\mathbb{Q} \cap (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N})\big) - (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

(iv) $\big(\mathbb{R} - (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\big) - \mathbb{Q}$

(v) $\big((\mathbb{R} - \mathbb{Z}) - \mathbb{N}\big) \cup \mathbb{Q}$

(vi) $\big((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - \mathbb{Z}\big) \cup \big(\mathbb{Q} - (\mathbb{R} - \mathbb{Q})\big)$

(vii) $\Big(\big(\mathbb{Z} \cup \mathbb{N}\big) \cup \mathbb{Q}\Big) \cap \big((\mathbb{R} - \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} - \mathbb{N})\big)$

(viii) $\big((\mathbb{R} - \mathbb{N}) - \mathbb{Z}\big) \cup \mathbb{Q}$

7. Έστω A, B, Γ και Δ σύνολα. Να αποδείξετε ότι:

(i) $A - B = A \cap B^C$

(ii) $\left(A^C\right)^C = A$

(iii) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

(iv) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

(v) $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$

(vi) Αν $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta$, τότε $A \times \Gamma \subseteq B \times \Delta$

(vii) Αν $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta$, τότε $A - \Delta \subseteq B - \Gamma$

(viii) Αν A, B είναι ξένα μεταξύ τους και Γ, Δ είναι ξένα μεταξύ τους, τότε τα $A \cup \Gamma$ και $B \cup \Delta$ είναι ξένα μεταξύ τους

8. Έστω $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

   (i) $a \mid a$
   (ii) $1 \mid a$
   (iii) $a \mid 1 \iff |a| = 1$
   (iv) $a \mid 0$
   (v) $0 \mid a \iff a = 0$
   (vi) Αν $a \mid b$ και $b \mid c$, τότε $a \mid c$
   (vii) Αν $a \mid b$ και $b \neq 0$, τότε $|a| \leq |b|$
   (viii) Αν $a \mid b$ και $b \mid a$, τότε $|a| = |b|$
   (ix) Αν $a \mid b$, τότε $a \mid b \cdot c$
   (x) Αν $a \mid b$ και $a \mid c$, τότε $a \mid b \cdot c + d \cdot c$
   (xi) Αν $a \mid b$ και $c \mid d$, τότε $a \cdot c \mid b \cdot d$

9. Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

   i Αν x άρτιος και y άρτιος, τότε οι $x + y, x - y, xy$ είναι άρτιοι
   ii Αν x άρτιος και y περιττός, τότε οι $x + y, x - y$ είναι περιττοί και ο xy είναι άρτιος
   iii Αν x περιττός και y περιττός, τότε οι $x + y, x - y$ είναι άρτιοι και ο xy είναι περιττός

10. Να βρείτε το μκδ και το εκπ των παρακάτω αριθμών:

   (i) 900 και 210
   (ii) 8660 και 5300
   (iii) 454, 680 και 9320
   (iv) 750, 869 και 5578

11. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1, 2, \ldots, 2018, 2019\}$:

   (i) διαιρούνται με 3 και με 5
   (ii) διαιρούνται με 3 ή με 5
   (iii) διαιρούνται με 2 ή με 3 ή με 5
   (iv) δεν διαιρούνται με 6 και δεν διαιρούνται με 28
   (v) δεν διαιρούνται με 14 ή δεν διαιρούνται με 20 ή δεν διαιρούνται με 30

12. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1, 2, \ldots, 2018, 2019\}$:

   (i) είναι σχετικά πρώτοι με το 15
   (ii) είναι σχετικά πρώτοι με το 21
   (iii) είναι σχετικά πρώτοι με 15 ή είναι σχετικά πρώτοι με το 21

13. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{1000, 1001, \ldots, 2018, 2019\}$:

(i) διαιρούνται με 3 και με 5

(ii) διαιρούνται με 3 ή με 5

(iii) διαιρούνται με 2 ή με 3 ή με 5

(iv) δεν διαιρούνται με 6 και δεν διαιρούνται με 28

(v) δεν διαιρούνται με 14 ή δεν διαιρούνται με 20 ή δεν διαιρούνται με 30

14. Να βρείτε πόσοι αριθμοί στο $\{-2019, -2018, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2018, 2019\}$:

(i) διαιρούνται με 3 και με 5

(ii) διαιρούνται με 3 ή με 5

(iii) διαιρούνται με 2 ή με 3 ή με 5

(iv) δεν διαιρούνται με 6 και δεν διαιρούνται με 28

(v) δεν διαιρούνται με 14 ή δεν διαιρούνται με 20 ή δεν διαιρούνται με 30

15. Να γράψετε με συμβολισμό Σ τα παρακάτω αθροίσματα και να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iv) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(v) $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

16. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ και $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ με $x_i > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots n$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\log(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) = \sum_{i=1}^{n} \log x_i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(ii) $|\sum_{j=1}^{n} y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |y_j|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

(iii) $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{y_1} = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{y_1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

17. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

(i) $2^n > n + 4$ για κάθε $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$

(ii) $\sum_{r=1}^{n} \dfrac{1}{r^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

18. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

  (i) $8 \mid 3^{2n} - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
  (ii) $2 \mid n^2 + n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
  (iii) $6 \mid n^3 - n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
  (iv) $11 \mid 27 \cdot 23^n + 17 \cdot 10^{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

19. Έστω $x \in \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

  i Αν x άρτιος, τότε x^n είναι άρτιος για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$
  ii Αν x περιττός, τότε x^n είναι περιττός για κάθε $n \in \mathbb{N}$

20. Έστω n αντικείμενα ($n \in \mathbb{N}^*$). Να αποδείξετε ότι το πλήθος των μεταθέσεων των n αντικειμένων είναι $P(n) = n!$

21. Έστω n αντικείμενα ($n \in \mathbb{N}^*$) και $k \leq n$. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των $k-$μεταθέσεων των n αντικειμένων είναι $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

22. Έχουμε 60 αριθμημένες σφαίρες (1-60) και 60 κουτιά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις σφαίρες στα κουτιά:

  (i) Χωρίς περιορισμό;

  (ii) Αν πρέπει η σφαίρα 2 να είναι στο κουτί 30 και η σφαίρα 60 να είναι στο κουτί 1;

  (iii) Αν πρέπει οι περιττές και οι άρτιες σφαίρες να εναλλάσονται;

  (iv) Αν πρέπει οι σφαίρες 1 και 2 να είναι σε διαδοχικά κουτιά ή πρέπει οι σφαίρες 59 και 60 να είναι σε διαδοχικά κουτιά;

  (v) Αν δεν πρέπει οι σφαίρες 5 και 6 να είναι σε διαδοχικά κουτιά και δεν πρέπει οι σφαίρες 7 και 9 να είναι σε διαδοχικά κουτιά;

23. Έχουμε 60 αριθμημένες σφαίρες (1-60) και 20 κουτιά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις σφαίρες στα κουτιά:

(i) Χωρίς περιορισμό;

(ii) Αν πρέπει η σφαίρα 5 να είναι στο κουτί 1 ή η σφαίρα 1 να είναι στο κουτί 5;

(iii) Αν πρέπει οι περιττές και οι άρτιες σφαίρες να εναλλάσονται;

(iv) Αν πρέπει οι σφαίρες 1, 2 και 3 να είναι σε διαδοχικά κουτιά;

(v) Αν πρέπει τα κουτιά να έχουν μόνο άρτιες σφαίρες ή πρέπει τα κουτιά να έχουν μόνο περιττές σφαίρες;

24. Έχουμε 5 άνδρες και 6 γυναίκες. Θέλουμε να φτιάξουμε μια ομάδα με 7 άτομα. Πόσες ομάδες των 7 ατόμων μπορούμε να φτιάξουμε:

(i) Χωρίς περιορισμό;
(ii) Αν πρέπει να υπάρχουν στην ομάδα ακριβώς 3 γυναίκες;
(iii) Αν πρέπει να υπάρχουν στην ομάδα το πολύ 2 άνδρες;
(iv) Αν πρέπει να υπάρχουν στην ομάδα τουλάχιστον 4 άνδρες;
(v) Αν πρέπει να υπάρχουν στην ομάδα όλοι οι άνδρες;

25. Σε ένα σχολείο υπάρχουν 65 παιδιά, 31 αγόρια και 34 κορίτσια. Πόσες διαφορετικές επιτροπές [committees] με 30 μέλη [members] μπορούμε να φτιάξουμε:

(i) Χωρίς περιορισμό;
(ii) Αν η επιτρποπή έχει 20 αγόρια και 10 κορίτσια;
(iii) Αν η επιτροπή έχει πρόεδρο;
(iv) Αν η επιτροπή έχει πρόεδρο αγόρι και αντιπρόεδρο κορίτσι;
(v) Αν η επιτροπή έχει μόνο κορίτσια;
(vi) Αν η επιτροπή έχει τουλάχιστον 29 αγόρια;
(vii) Αν η επιτροπή έχει το πολύ 1 κορίτσι;

26. Φτιάχνουμε κωδικούς χρησιμοποιώντας γράμματα από το Λατινικό αλφάβητο με διάκριση πεζών - κεφαλαίων (A-Z, a-z), ψηφία (0 - 9) και σύμβολα από το $\{!, @, \&, \$, \#\}$, <u>το πολύ</u> μία φορά. Ο κωδικός έχει 12 χαρακτήρες. Πόσους διαφορετικούς κωδικούς μπορούμε να φτιάξουμε:

(i) Χωρίς περιορισμό;
(ii) Αν ο κωδικός ξεκινάει με κεφαλαίο γράμμα;
(iii) Αν ο κωδικός έχει τους χαρακτήρες @ και #;
(iv) Αν ο κωδικός έχει ακριβώς 2 κεφαλαία γράμματα;
(v) Αν ο κωδικός έχει τουλάχιστον 9 αριθμούς;
(vi) Αν ο κωδικός ξεκινάει με πεζό γράμμα ή έχει ακριβώς 2 σύμβολα;
(vii) Αν ο κωδικός δεν έχει πεζά γράμματα ή δεν έχει κεφαλαία γράμματα;

27. Έστω το σύνολο $A = \{1, 2, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι:

(i) Το πλήθος των υποσυνόλων του A με k στοιχεία είναι $\binom{n}{k}$, όπου $k \in \mathbb{N},\ k \leq n$.

(ii) Το πλήθος των υποσυνόλων του A είναι 2^n.

(iii) Να συμπεράνετε ότι $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

28. Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n$ με $x_i \in \{0, 1\}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

(i) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = k$, για $k \in \mathbb{N}$

(ii) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της ανισότητας $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq n$